

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยได้เสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี Action-Process-Structure (APS) เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 กลุ่มเป้าหมาย ทั้งหมด จำนวน 45 คน ตามรายชื่อ เป็นดังนี้

ข้อสอบข้อที่ 1-2 มีระดับความเข้าใจ 2 ระดับ คือ ระดับการจัดกระทำและระดับกระบวนการ ข้อสอบข้อที่ 3-5 มีระดับความเข้าใจ 3 ระดับ คือ ระดับการจัดกระทำและระดับกระบวนการและระดับโครงสร้าง จำนวน 45 คน ปรากฏผลดังตารางที่ 9
ตารางที่ 9 ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ของเป้าหมาย

ข้อที่	ระดับความเข้าใจ		
	การจัดกระทำ (ร้อยละ)	กระบวนการ (ร้อยละ)	โครงสร้าง (ร้อยละ)
1	88	85	-
2	85	67	-
3	84	66	23
4	86	65	27
5	80	68	20

จากตารางที่ 9 พบว่า นักเรียนมีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ข้อที่ 1 ระดับการจัดกระทำ ร้อยละ 88 และระดับกระบวนการร้อยละ 85 ข้อที่ 2 ระดับการจัดกระทำร้อยละ 85 และระดับกระบวนการร้อยละ 67 ข้อที่ 3 ระดับการจัดกระทำร้อยละ 84 ระดับกระบวนการร้อยละ 66 และระดับโครงสร้างร้อยละ 23 ข้อที่ 4 ระดับการจัดกระทำร้อยละ 86 ระดับกระบวนการร้อยละ 65 และระดับโครงสร้างร้อยละ 27 และข้อที่ 5 ระดับการจัดกระทำร้อยละ 80 ระดับกระบวนการร้อยละ 68 และระดับโครงสร้างร้อยละ 20

ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี Action-Process-Structure (APS) เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ของกรณีศึกษา จำนวน 6 คน เป็นดังนี้

1. กลุ่มเก่ง

ข้อที่ 1-2 มีระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ 2 ระดับ คือ ระดับการจัดกระทำ และระดับกระบวนการข้อที่ 3-5 มีระดับความเข้าใจ 3 ระดับ คือ ระดับการจัดกระทำ ระดับกระบวนการและระดับโครงสร้างหลังจากตรวจแบบทดสอบ นักเรียนกลุ่มเก่ง ทั้ง 3 คน ปรากฏผลดังตาราง

ที่ 10



มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
RAJABHAT MAHASARAKHAM UNIVERSITY

ตารางที่ 10 ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์จากการทำแบบทดสอบของกลุ่มเก่ง

ข้อ ที่	ระดับความ เข้าใจ	ยุทธ	ตุล	กฤต
1	การจัดกระทำ	จำแนกและเข้าใจ สัญลักษณ์ของฟังก์ชัน ในการแทนค่าของ ฟังก์ชันและนำมา เขียนกราฟได้	จำแนกและเข้าใจ สัญลักษณ์ของฟังก์ชัน ในการแทนค่าของ ฟังก์ชันและนำมา เขียนกราฟได้	จำแนกและเข้าใจ สัญลักษณ์ของฟังก์ชัน ในการแทนค่าของ ฟังก์ชันและนำมาเขียน กราฟได้
	กระบวนการ	หาค่า $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้	หาค่า $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้	หาค่า $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้
2	การจัดกระทำ	ดูกราฟแล้วหาค่าของ ฟังก์ชัน $f(x)$ ได้	ดูกราฟแล้วหาค่าของ ฟังก์ชัน $f(x)$ ได้	ดูกราฟแล้วหาค่าของ ฟังก์ชัน $f(x)$ ได้
	กระบวนการ	หาค่าลิมิตของฟังก์ชัน ค่าลิมิตของฟังก์ชัน ด้านซ้ายและด้านขวา ได้	หาค่าลิมิตของฟังก์ชัน ค่าลิมิตของฟังก์ชัน ด้านซ้ายและด้านขวา ได้	ไม่สามารถหาค่าลิมิต ของฟังก์ชัน ค่าลิมิต ของฟังก์ชันด้านซ้าย และด้านขวาได้
3	การจัดกระทำ	ดูกราฟแล้วหาค่าของ ฟังก์ชัน $f(x)$ ได้	ดูกราฟแล้วหาค่าของ ฟังก์ชัน $f(x)$ ได้	ดูกราฟแล้วหาค่าของ ฟังก์ชัน $f(x)$ ได้
	กระบวนการ	หาค่าของฟังก์ชัน $f(-1)$ และ $f(3)$ และค่า ลิมิตของฟังก์ชัน ด้านซ้ายและด้านขวา และค่าลิมิตของ	ไม่สามารถหาค่าของ ฟังก์ชัน $f(-1)$ และ $f(3)$ และค่าลิมิตของ ฟังก์ชันด้านซ้ายและ ด้านขวา และค่าลิมิต	ไม่สามารถหาค่าของ ฟังก์ชัน $f(-1)$ และ $f(3)$ และค่าลิมิตของ ฟังก์ชันด้านซ้ายและ ด้านขวา และค่าลิมิต

ข้อ ที่	ระดับความ เข้าใจ	ยุทธ	ตุล	กฤต
		ฟังก์ชัน เมื่อ $x=c$ ได้	ของฟังก์ชัน เมื่อ $x=c$ ได้	ของฟังก์ชัน เมื่อ $x=c$ ได้
	ระดับ โครงสร้าง	หาค่าความต่อเนื่องบน ช่วง $[a,b]$ ได้	ไม่สามารถหาค่าความ ต่อเนื่องบน ช่วง $[a,b]$ ได้	ไม่สามารถหาค่าความ ต่อเนื่องบน ช่วง $[a,b]$ ได้
4	ระดับการจัด กระทำ	หาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$	หาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$	หาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$
	ระดับ กระบวนการ	หาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้	หาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้	ไม่สามารถหาค่าลิมิต ของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้
	ระดับ โครงสร้าง	ใช้นิยามหาค่าความ ต่อเนื่องฟังก์ชัน บน ช่วง $[a,b]$	ใช้นิยามหาค่าความ ต่อเนื่องฟังก์ชัน บน ช่วง $[a,b]$	ไม่สามารถใช้นิยามหา ค่าความต่อเนื่อง ฟังก์ชัน บนช่วง $[a,b]$
5	ระดับการจัด กระทำ	หาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้	หาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้	หาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้
	ระดับ กระบวนการ	หาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้	ไม่สามารถหาค่าลิมิต ของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้	ไม่สามารถหาค่าลิมิต ของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้
	ระดับ โครงสร้าง	ใช้นิยามหาค่าความ ต่อเนื่องฟังก์ชัน บน ช่วง $[a,b]$ ได้	ไม่สามารถใช้นิยามหา ค่าความต่อเนื่อง ฟังก์ชัน บนช่วง $[a,b]$ ได้	ไม่สามารถใช้นิยามหา ค่าความต่อเนื่อง ฟังก์ชัน บนช่วง $[a,b]$ ได้

จากตารางที่ 10 พบว่า ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์จากการหาคำตอบข้อที่ 1-2 ของนักเรียนกลุ่มเก่ง ทั้ง 3 คน มีระดับความเข้าใจ 2 ระดับ คือ ระดับการจัดกระทำและระดับกระบวนการ และข้อที่ 3-5 ยุทธ มีระดับความเข้าใจ 3 ระดับ คือ ระดับการจัดกระทำ ระดับกระบวนการและระดับโครงสร้าง ตูล ข้อที่ 3 มีความเข้าใจ 1 ระดับ คือระดับการจัดกระทำ ข้อที่ 4 มีระดับความเข้าใจ 3 ระดับ คือ ระดับการจัดกระทำ ระดับกระบวนการและระดับโครงสร้าง ข้อที่ 5 มีระดับ

ความเข้าใจ 1 ระดับ คือ ระดับการจัดกระทำ และกฤต ข้อที่ 3-5 มีระดับความเข้าใจ 1 ระดับ คือ ระดับการจัดกระทำ

1.1 กลุ่มเก่งคนที่ 1 ยุทธ

ตารางที่ 11 ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์จากการทำแบบทดสอบทั้ง 5 ข้อ ของยุทธ

ข้อ	ระดับความเข้าใจ		
	การจัดกระทำ	กระบวนการ	โครงสร้าง
1	จำแนกและเข้าใจสัญลักษณ์ของฟังก์ชัน ในการแทนค่าของฟังก์ชันและนำมาเขียนกราฟได้	หาค่า $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้	-
2	ดูกราฟแล้วหาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$	หาค่าลิมิตของฟังก์ชัน หาค่าลิมิตของฟังก์ชันด้านซ้ายและหาค่าลิมิตของฟังก์ชันด้านขวาได้	-
3	ดูกราฟแล้วหาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$	หาค่าของฟังก์ชัน $f(-1)$ และ $f(3)$ และค่าลิมิตของฟังก์ชันด้านซ้ายและด้านขวา และค่าลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ $x=c$ ได้	หาค่าความต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ ได้
4	หาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$	หาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้	ใช้นิยามหาค่าความต่อเนื่องฟังก์ชันบนช่วง $[a,b]$
5	หาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$	หาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้	ใช้นิยามหาค่าความต่อเนื่องฟังก์ชันบนช่วง $[a,b]$

จากตารางที่ 11 พบว่า ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ในการหาคำตอบทั้ง 5 ข้อของยุทธ มีระดับความเข้าใจ ข้อที่ 1- ข้อที่ 2 มีระดับความเข้าใจ 2 ระดับ คือ ระดับการจัดกระทำและระดับกระบวนการ ข้อที่ 3 -ข้อที่ 5 มีระดับความเข้าใจ 3 ระดับ คือ ระดับการจัดกระทำ ระดับกระบวนการ และระดับโครงสร้าง

จากแบบทดสอบข้อที่ 1 กระบวนการสร้างความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับความหมายของลิมิตของฟังก์ชัน

ข้อ 1. กำหนด $f(x) = x^2 - x + 4$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ และเขียนกราฟ (แสดงวิธีทำ 5 คะแนน)

x	f(x)
1.0	4.0000
1.5	4.7500
1.8	5.4400
1.9	5.7100
1.95	5.8525
1.99	5.9700
1.995	5.9950
1.999	5.9970

x	f(x)
3.0	10.0000
2.5	7.7500
2.2	6.6400
2.1	6.5100
2.05	6.1525
2.01	6.0501
2.005	6.0150
2.001	6.0050

ภาพที่ 1 แสดงการแทนค่าในตารางเพื่อหา $f(x)$ ข้อสอบข้อที่ 1 ของบุทร

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 1 ของบุทร

จากภาพที่ 1 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจในการแปลความหมายของข้อมูลจากตาราง

ผู้วิจัย : บุทรมีวิธีในการแทนค่า x เพื่อหา $f(x)$ อย่างไร

บุทร : นำค่า x ที่ได้แทนในสมการ $f(x) = x^2 - x + 6$ แล้วนำค่า $f(x)$ ที่ได้เขียนลงในตาราง

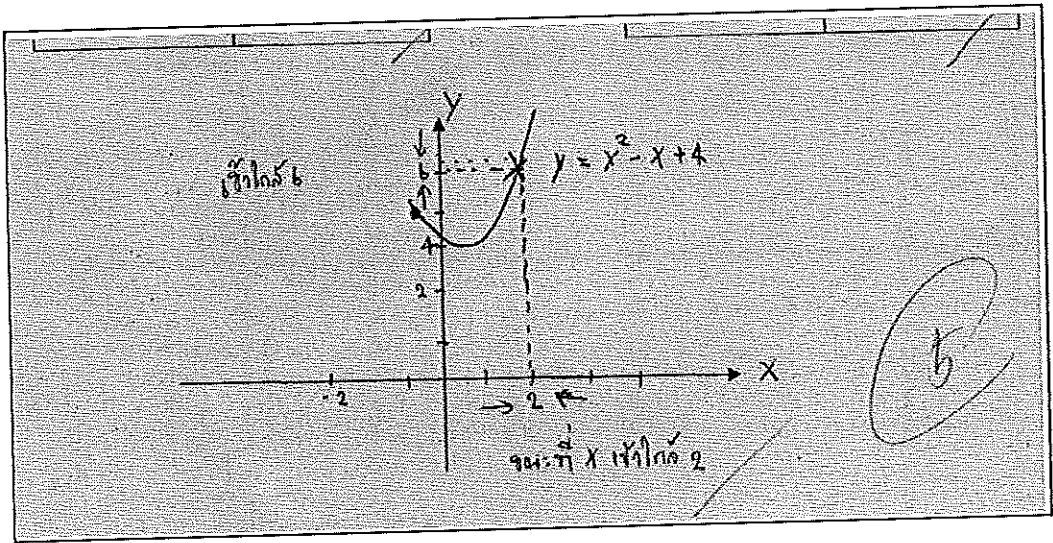
ผู้วิจัย : แล้วเราได้อะไรจากตาราง

บุทร : เมื่อแทนค่า x ในสมการแล้วได้ $f(x)$ ทำให้เรารู้ว่า x มีค่าเข้าใกล้ 2 ด้านซ้าย $f(x)$

จะเข้าใกล้ 6 และ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ด้านขวา $f(x)$ จะเข้าใกล้ 6

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น บุทรสามารถแสดงวิธีการแทนค่าฟังก์ชันลงในตาราง โดย

การแทนค่า x ที่ได้แทนในสมการ $f(x) = x^2 - x + 6$ แล้วนำค่า $f(x)$ ที่ได้เขียนลงในตาราง



ภาพที่ 2 แสดงการเขียนกราฟของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 1 ของยุทธ

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 1 ของยุทธ

จากภาพที่ 2 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : ยุทธมีวิธีการนำค่า x และ $f(x)$ จากตารางมาเขียนกราฟของฟังก์ชันได้อย่างไร

ยุทธ : สร้าง แกน x และ แกน y

ผู้วิจัย : ยุทธมีวิธีการนำค่า x และ $f(x)$ มาเขียนกราฟอย่างไร

ยุทธ : หาค่า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ จากกราฟ

ผู้วิจัย : ยุทธหาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้อย่างไร

ยุทธ : แทนค่า x และ $f(x)$ ลงในกราฟ แล้วลากเส้นกราฟของฟังก์ชัน แล้วก็จะได้คำตอบ

จากกราฟ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 6$ จะได้ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6$ เพราะจากนิยามของฟังก์ชัน

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ยุทธสามารถแสดงวิธีการแทนค่าฟังก์ชันลงในกราฟของฟังก์ชัน
ได้ถูกต้องครบทุกขั้นตอน

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - x + 4$$

$$= (2)^2 - 2 + 4$$

$$= b$$

ภาพที่ 3 แสดงการหาขีดจำกัดของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 1 ของยุทธ

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 1 ของยุทธ

จากภาพที่ 3 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการแก้สมการของฟังก์ชัน

ยุทธ : หาค่า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ จากกราฟ

ผู้วิจัย : ยุทธหาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้อย่างไร

ยุทธ : จากนิยาม ถ้า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$

ผู้วิจัย : แล้ว $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ มีค่าเท่าไร

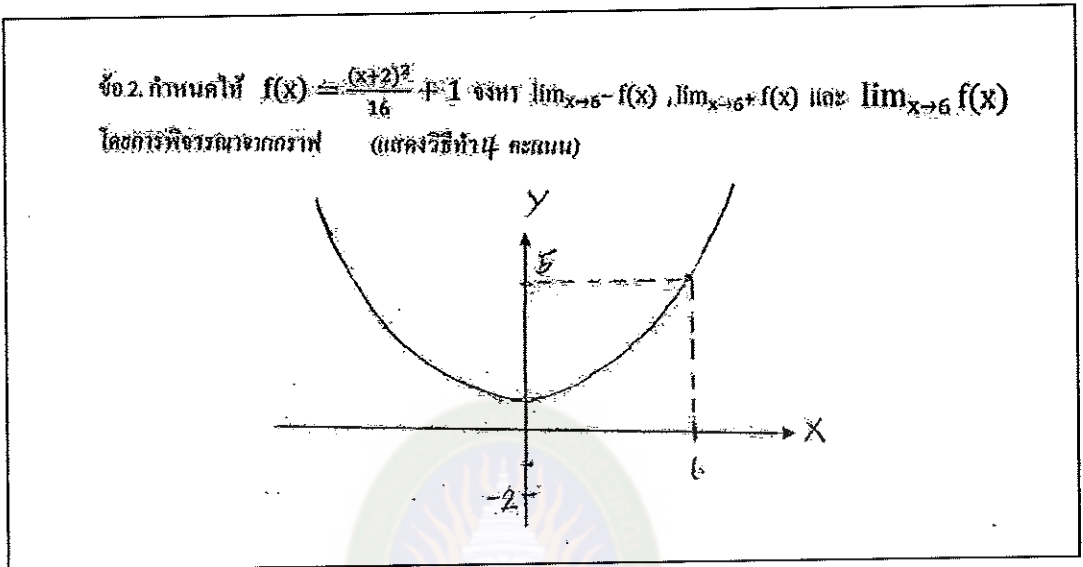
ยุทธ : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 6$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6$

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ยุทธสามารถแสดงวิธีการแทนค่าฟังก์ชันลงในกราฟแล้วหาค่า

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ จากกราฟและจากนิยามถ้า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = L$ แล้ว

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$ ได้ถูกต้องครบทุกขั้นตอน

จากแบบทดสอบข้อที่ 2 กระบวนการสร้างความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับความหมายของลิมิตของฟังก์ชัน



ภาพที่ 4 แสดงการหาลิมิตของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 2 ของยุทธ

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 2 ของยุทธ

จากภาพที่ 4 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการแก้สมการของฟังก์ชัน

ยุทธ : หาค่า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ จากกราฟ

ผู้วิจัย : ยุทธหาค่า $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$ ได้อย่างไร

ยุทธ : จากนิยาม ถ้า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = L$

ผู้วิจัย : แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ มีค่าเท่าไร

ยุทธ : $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = 5$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 5$

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ยุทธสามารถหาค่าฟังก์ชันจากกราฟแล้วหาค่า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$,

$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ จากกราฟและจากนิยามถ้า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = L$ ได้

ถูกต้องครบทุกขั้นตอน

$$\lim_{x \rightarrow 6} = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x+2)^2 + 1}{16}$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 + 4x + 4 + 1}{16}$$

$$= \frac{(6)^2 + 4(6) + 4 + 1}{16}$$

$$= \frac{64 + 1}{16}$$

$$= \frac{4 + 1}{16}$$

$$= 5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 6^-} = 5 \quad \lim_{x \rightarrow 6^+} = 5 \quad \lim_{x \rightarrow 6} = 5$$

ภาพที่ 5 แสดงการหาขีดจำกัดของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 2 ของยุทธ

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 2 ของยุทธ

จากภาพที่ 5 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการแก้สมการของฟังก์ชัน
ยุทธ : หาค่า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ จากสมการ

ผู้วิจัย : ยุทธหาค่า $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$ ได้อย่างไร

ยุทธ : จากนิยาม ถ้า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = L$

ผู้วิจัย : แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ มีค่าเท่าไร

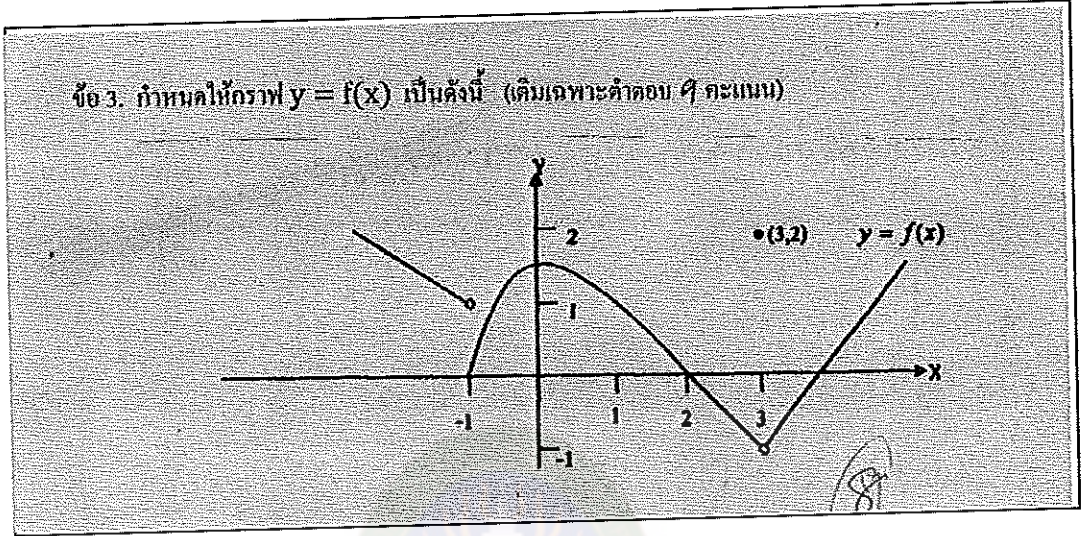
ยุทธ : $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = 5$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 5$

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ยุทธสามารถหาค่าฟังก์ชันจากสมการ แล้วหาค่า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$,

$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ จากสมการและจากนิยามถ้า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = L$ ได้

ถูกต้องครบทุกขั้นตอน

จากแบบทดสอบข้อที่ 3 กระบวนการสร้างความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน



ภาพที่ 6 แสดงกราฟของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 3 ของยุทธ

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 3 ของยุทธ

จากภาพที่ 6 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : ยุทธมีวิธีการหาคำตอบจากกราฟได้อย่างไร

ยุทธ : ดูจุดแต่ละจุดที่เส้นกราฟลากผ่าน

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ยุทธสามารถหาคำตอบจากกราฟของฟังก์ชัน

งหาคำของ	
3.1) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \dots\dots\dots 1 \dots\dots\dots$	3.2) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots$
3.3) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \dots\dots\dots \text{หาไม่ได้} \dots\dots\dots$	3.4) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots$
3.5) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \dots\dots\dots 1 \dots\dots\dots$	3.6) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \dots\dots\dots -1 \dots\dots\dots$
3.7) $f(-1) = \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots$	3.8) $f(3) = \dots\dots\dots 2 \dots\dots\dots$

ภาพที่ 7 แสดงการหาลิมิตของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 3 ของยุทธ

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 3 ของยุทธ

จากภาพที่ 7 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาลิมิตของฟังก์ชัน

ยุทธ : หาค่า $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ จากกราฟ

ผู้วิจัย : ยุทธหาค่า $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ได้อย่างไร

ยุทธ : จากนิยาม ถ้า $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = L$

ผู้วิจัย : แล้วทำอย่างไรต่อ

ยุทธ : หาค่า $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ มีค่าเท่าไร

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาค่าตอบอย่างไร

ยุทธ : ดูจากกราฟแล้วหาค่าตอบ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

ผู้วิจัย : แล้วทำอย่างไรต่อ

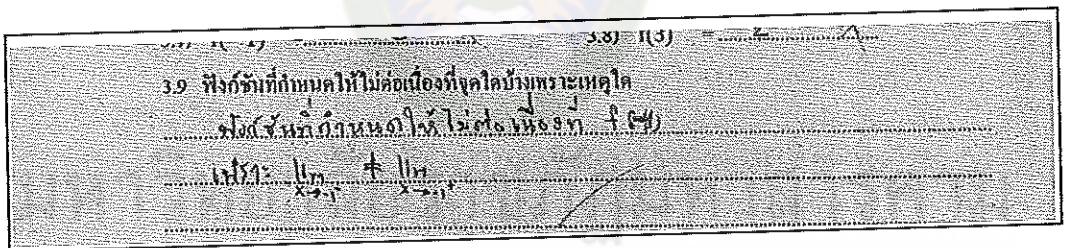
ยุทธ : หาค่าตอบของ $f(-1)$ และ $f(3)$ จากกราฟ

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ยุทธสามารถหาค่าฟังก์ชันจากกราฟแล้วหาค่า $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$,

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ จากสมการและจากนิยามถ้า $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = L$ และ

หาค่า $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ จากสมการและจากนิยามถ้า $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = L$ แล้ว

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = L$ และหาค่า $f(-1)$ และ $f(3)$ ได้ ถูกต้องครบทุกขั้นตอน



ภาพที่ 8 แสดงการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 3 ของยุทธ

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 3 ของยุทธ

จากภาพที่ 8 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่อง

ของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาค่าตอบอย่างไร

ยุทธ : ดูจากโจทย์ฟังก์ชันที่กำหนดให้ไม่ต่อเนื่องที่จุดใดบ้าง

ผู้วิจัย : นักเรียนหาค่าตอบจากไหน

ยุทธ : ดูจากกราฟจะได้ว่า ขีดจำกัดของฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = 3$

เพราะกราฟที่ $x = 3$ กราฟขาดช่วงทำให้หาค่าของขีดจำกัดไม่ได้

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ยูทสามารถหาค่าฟังก์ชันจากกราฟจะได้ว่า ลิมิตของฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x=3$ เพราะกราฟที่ $x=3$ กราฟขาดช่วงทำให้หาค่าของลิมิตไม่ได้

3.10 ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อเนื่องบนช่วงใดไปหรือไม่เพราะเหตุใด

1) $[-1,2]$ ตอบ...ต่อเนื่อง.....เพราะ...เพราะเส้นตรงต่อเนื่องที่จุด $(-1,2)$ ✓

2) $[-1,3]$ ตอบ...ไม่ต่อเนื่อง.....เพราะ...เส้นตรงไม่ต่อเนื่องที่จุด $(-1,3)$

ภาพที่ 9 แสดงการหาลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วง ข้อสอบข้อที่ 3 ของยูท

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 3 ของยูท

จากภาพที่ 9 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

ยูท : ดูจากโจทย์ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อเนื่องบนช่วงใดบ้าง

ผู้วิจัย : นักเรียนหาคำตอบจากไหน

ยูท : ดูจากกราฟจะได้ว่า ลิมิตของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-1,2]$

และไม่ต่อเนื่องบนช่วง $[-1,3]$

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ยูทสามารถหาค่าลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันจากกราฟลิมิตของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-1,2]$ และไม่ต่อเนื่องบนช่วง $[-1,3]$

จากแบบทดสอบข้อที่ 4 กระบวนการสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ข้อ 4. กำหนด $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$; $x \neq 1$ จงพิจารณาว่าฟังก์ชันนี้ต่อเนื่องที่ $x=1$ หรือไม่

$\frac{x}{x+1}$; $x=1$ (แสดงวิธีทำ 5 คะแนน)

ภาพที่ 10 แสดงการหาลิมิตของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 4 ของยูท

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 4 ของยุทธ

จากภาพที่ 10 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

ยุทธ : ดูจากโจทย์ฟังก์ชันเพื่อพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อเนื่องที่ $x = 1$

ผู้วิจัย : นักเรียนทำอย่างไรต่อ

ยุทธ : จากบทนิยามฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชัน หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ได้ หา $f(c)$ ได้

และ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ จึงจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ยุทธสามารถหาค่าขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชันได้

$x+1$	
$f(c) = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$	$= \frac{\sqrt{1^2 + 3} + 2}{1+1}$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$	$= \frac{4}{2} = 2$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x^2+3-4)}$	$\therefore f$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x=1$ เพราะว่า
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x^2-1)}$	$f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{(x+1)}$	

ภาพที่ 11 แสดงการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 4 ของยุทธ

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 4 ของยุทธ

จากภาพที่ 11 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

ยุทธ : ดูบทนิยามฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชัน หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ได้ หา $f(c)$ ได้

และ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ จึงจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$

ผู้วิจัย : นักเรียนหาคำตอบจากไหน

ยุทธ : หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ จากสมการ $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$ และ หา $f(c)$

จากสมการ $\frac{x}{x+1}$

ผู้วิจัย : นักเรียนทำอย่างไรต่อ

ยุทธ : ถ้า $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} = f(c)$ แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่

$x=1$

ผู้วิจัย : ถ้า $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} \neq f(c)$ ไม่เท่ากันแสดงว่า f เป็นอย่างไร

ยุทธ : แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x=1$

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ยุทธสามารถหาค่าความต่อเนื่องของฟังก์ชัน จากบทนิยาม ฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชัน หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ได้ หา $f(c)$ ได้ และ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ จึงจะเป็น ฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$

จากแบบทดสอบข้อที่ 5 กระบวนการสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับลิมิตและความต่อเนื่องของ ฟังก์ชัน

ข้อ 5. กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 4; x \leq -1$
 $x + a; -1 < x < 3$
 $3x + b; x \geq 3$
 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง $[-1, 3]$ จงหาค่าของ $a + b$ (แสดงวิธีทำ ๗ คะแนน)

ภาพที่ 12 แสดงการหาลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 5 ของยุทธ

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 5 ของยุทธ

จากภาพที่ 12 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาลิมิตและความต่อเนื่องของ ฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

ยุทธ : ดูบทนิยามฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชัน หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ได้ หา $f(c)$ ได้

และ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ จึงจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = c$

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ยูทสามารถหาค่าความต่อเนื่องของฟังก์ชัน จากบทนิยาม ฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชัน หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ได้ หา $f(c)$ ได้ และ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ จึงจะเป็น ฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = c$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = -1$

จะได้ $x^2 + 4 = x + a$

$f(-1) = (-1)^2 + 4 = (-1) + a$

$= a = 5 + 1$

$a = 6$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0$

จะได้ $3x + 6 = x + a$

$3(0) + 6 = 0 + a$

$6 = a$

$\therefore a + b = 6 + 0$

$= 6 \text{ Ans}$

ภาพที่ 13 แสดงการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 5 ของยูท และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 5 ของยูท จากภาพที่ 13 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบได้อย่างไร

ยูท : หาค่าของ $f(x) = x^2 + 4$ เท่ากับ $f(x) = x + a$ เพื่อหาค่า a โดยดูจากเงื่อนไขที่โจทย์

กำหนดให้

ผู้วิจัย : นักเรียนทำอย่างไรต่อ

ยูท : หาค่า $f(x) = x + a$ เท่ากับ $f(x) = 3x + b$ เพื่อหาค่า b โดยดูจากเงื่อนไขที่โจทย์

กำหนดให้

ผู้วิจัย : นักเรียนทำอย่างไรต่อ

ยูท : จากนั้นนำค่า $a + b$ เพื่อหาคำตอบ

ผู้วิจัย : ทำไมนักเรียนจึงนำสมการ $f(x) = x^2 + 4$ และ สมการ $f(x) = x + a$ เท่ากัน และสมการ $f(x) = x + a$ เท่ากับ สมการ $f(x) = 3x + b$

ยุทธ : เพราะจากโจทย์ f ฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง $[-1, 3]$

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ยุทธสามารถหาค่าความต่อเนื่องของฟังก์ชัน จากบทนิยาม ฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชัน หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ได้ หา $f(c)$ ได้ และ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ จึงจะเป็น ฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-1, 3]$

1.2 กลุ่มเก่งคนที่ 2 ตูล

ตารางที่ 12 ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์จากการทำแบบทดสอบทั้ง 5 ข้อ ของตูล

ข้อ	ระดับความเข้าใจ		
	การจัดกระทำ	กระบวนการ	โครงสร้าง
1	จำแนกและเข้าใจ สัญลักษณ์ของ ฟังก์ชัน ในการแทน ค่าของฟังก์ชันและ นำมาเขียนกราฟได้	หาค่า $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้	-
2	ดูกราฟแล้วหาค่า ของฟังก์ชัน $f(x)$	หาค่าลิมิตของฟังก์ชัน หาค่าลิมิต ของฟังก์ชัน หาค่าลิมิตของ ฟังก์ชันด้านซ้ายและหาค่าลิมิต ของฟังก์ชันด้านขวาได้	-
3	ดูกราฟแล้วหาค่า ของฟังก์ชัน $f(x)$	ไม่สามารถหาค่าของฟังก์ชัน $f(-1)$ และ $f(3)$ และค่าลิมิตของฟังก์ชัน ด้านซ้ายและด้านขวาและค่าลิมิต ของฟังก์ชัน เมื่อ $x=c$ ได้	ไม่สามารถหาค่าความต่อเนื่อง บน ช่วง $[a, b]$ ได้
4	หาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$	สามารถหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้	- ไม่สามารถใช้นิยามหาค่า ความต่อเนื่องฟังก์ชัน บนช่วง $[a, b]$
5	หาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$	ไม่สามารถหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้	- ไม่สามารถใช้นิยามหาค่า ความต่อเนื่องฟังก์ชัน บนช่วง $[a, b]$

จากตารางที่ 12 พบว่า ระดับความเข้าใจในการหาคำตอบทั้ง 5 ข้อของตุลมีระดับความเข้าใจ ข้อที่ 1 ข้อที่ 2 มีระดับความเข้าใจ 2 ระดับคือ ระดับการจัดกระทำและระดับกระบวนการ ข้อที่ 3 มีระดับความเข้าใจ 1 ระดับ คือ ระดับการจัดกระทำ ส่วนระดับกระบวนการและระดับโครงสร้างไม่มีความเข้าใจ ข้อที่ 4 มีระดับความเข้าใจ 2 ระดับ คือ ระดับการจัดกระทำ และระดับกระบวนการ ส่วนระดับโครงสร้างไม่มีความเข้าใจ

จากแบบทดสอบข้อที่ 1 กระบวนการสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับความหมายของลิมิตของฟังก์ชัน

ข้อ 1. กำหนด $f(x) = x^2 - x + 4$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ และเขียนกราฟ (แสดงวิธีทำ 5 คะแนน)

x	f(x)
1.0	4.00
1.5	4.75
1.8	5.44
1.9	5.71
1.95	5.85
1.99	5.97
1.995	5.98
1.999	5.99

x	f(x)
3.0	10
2.5	7.75
2.2	6.64
2.1	6.41
2.05	6.15
2.01	6.0301
2.005	6.015
2.001	6.003

ภาพที่ 14 แสดงการหาลิมิตของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 1 ของตุล

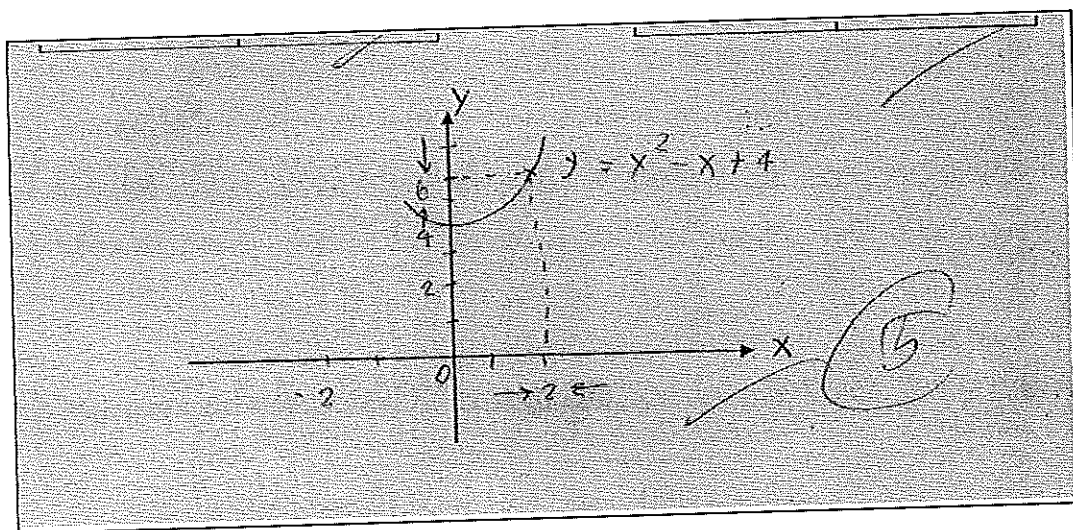
และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 1 ของตุล

จากภาพที่ 14 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจในการแปลความหมายของข้อมูลจากตาราง

ผู้วิจัย : ตูลมีวิธีในการแทนค่า x เพื่อหา $f(x)$ อย่างไร

ตุล : นำค่า x ที่ได้ แทนในสมการ $f(x) = x^2 - x + 6$ แล้วนำค่า $f(x)$ ที่ได้เขียนลงในตาราง

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ตูลสามารถแสดงวิธีการแทนค่าฟังก์ชันลงในตาราง โดยการแทนค่า x ที่ได้ แทนในสมการ $f(x) = x^2 - x + 6$ แล้วนำค่า $f(x)$ ที่ได้เขียนลงในตาราง



ภาพที่ 15 แสดงการหาขีดจำกัดของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 1 ของคุณ

และจากการสัมภาษณ์ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 1 ของคุณ

จากภาพที่ 15 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : คุณมีวิธีในการนำค่า x และ $f(x)$ จากตารางมาเขียนกราฟของฟังก์ชันได้อย่างไร

คุณ : สร้าง แกน x และ แกน y

ผู้วิจัย : คุณมีวิธีในการนำค่า x และ $f(x)$ มาเขียนกราฟอย่างไร

คุณ : หาค่า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ จากกราฟ

ผู้วิจัย : คุณหาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้อย่างไร

คุณ : แทนค่า x และ $f(x)$ ลงในกราฟ แล้วลากเส้นกราฟของฟังก์ชัน

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น คุณสามารถแสดงวิธีการแทนค่าฟังก์ชันลงในกราฟของฟังก์ชัน

ได้ถูกต้องครบทุกขั้นตอน

$$f(x) = x^2 - x + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - x + 4 = 2^2 - 2 + 4 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - x + 4 = 2^2 - 2 + 4 = 6$$
 หรือได้ว่าเมื่อ $x < 2$ และ $x > 2$ ค่าที่ใส่ $f(x)$ จะเห็นได้ 6
 ∴ ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - x + 4$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 จะลิมิตเป็น 6
 หรือ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6$ หรือ $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - x + 4 = 6$

ภาพที่ 16 แสดงการหาขีดจำกัดของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 1 ของคุณ

และจากการสังเกตผลการวิเคราะห์ข้อที่ 1 ของตุล

จากแผนภาพ ผู้วิจัย ได้ตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการแก้สมการของฟังก์ชัน

ตุล : หาค่า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ จากกราฟ

ผู้วิจัย : ตูลหาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้อย่างไร

ตุล : จากนิยาม ถ้า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$

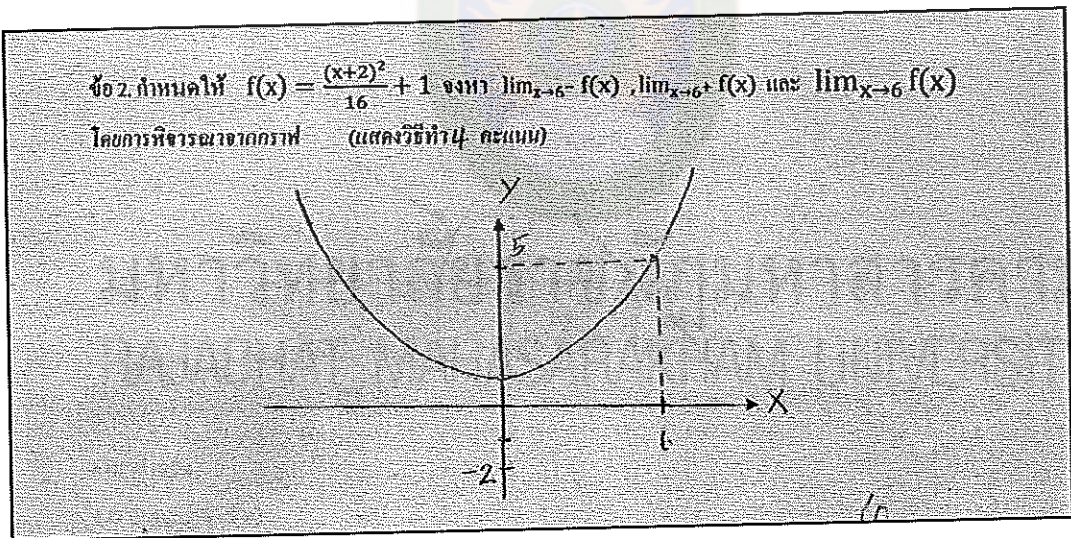
ผู้วิจัย : แล้ว $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ มีค่าเท่าไร

ตุล : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 6$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6$

จากผลการสังเกตข้างต้น ตูลสามารถแสดงวิธีการแทนค่าฟังก์ชันลงในกราฟ แล้วหาค่า

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ จากกราฟและจากนิยามถ้า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$

L ได้ถูกต้องครบทุกขั้นตอน



ภาพที่ 17 แสดงการหาขีดจำกัดของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 2 ของตุล

และจากการสังเกตผลการวิเคราะห์ข้อที่ 2 ของตุล

จากภาพที่ 17 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการแก้สมการของฟังก์ชัน

ตุล : หาค่า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ จากกราฟ

ผู้วิจัย : ตูลหาค่า $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$ ได้อย่างไร

ตุล : จากนิยาม ถ้า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = L$

ผู้วิจัย : แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ มีค่าเท่าไร

ตุล : $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = 5$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 5$

จากผลการสัมพัทธ์ข้างต้น ตูลสามารถหาค่าฟังก์ชันจากกราฟแล้วหาค่า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$,

$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ จากกราฟและจากนิยามถ้า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = L$ ได้

ถูกต้องครบทุกขั้นตอน

ใช้ $(x < 2)$

① $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} (x+2)^2 + 1 = (6+2)^2 + 1 = 5$ Ans

ใช้ $(x > 2)$

② $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} (x+2)^3 + 1 = (6+2)^3 + 1 = 5$ Ans

\therefore ดังนั้นของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{(x+2)^3 + 1}{16}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 6 แล้วเท่ากับ 5

ใช้ $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 5$ หรือ $\lim_{x \rightarrow 6} (x+2)^3 + 1 = 5$ Ans

ภาพที่ 18 แสดงการหาขีดจำกัดของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 2 ของตุล

และจากการสัมพัทธ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 2 ของตุล

จากภาพที่ 18 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการแก้สมการของฟังก์ชัน

ตุล : หาค่า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ จากสมการ

ผู้วิจัย : ตูลหาค่า $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$ ได้อย่างไร

ตุล : จากนิยาม ถ้า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = L$

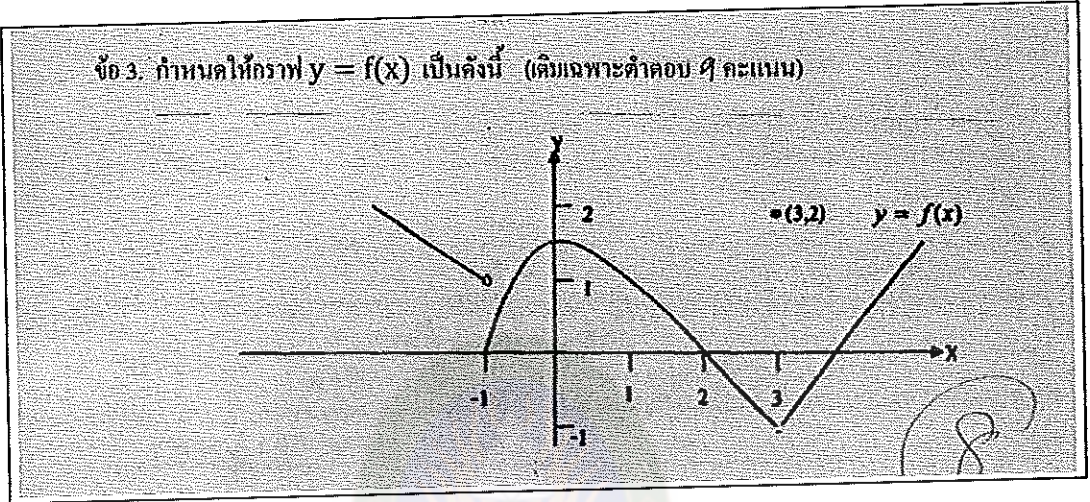
ผู้วิจัย : แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ มีค่าเท่าไร

ตุล : $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = 5$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 5$

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น คุณสามารถหาค่าฟังก์ชันจากสมการ แล้วหาค่า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$,

$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ จากสมการและจากนิยามถ้า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = L$ ได้

ถูกต้องครบทุกขั้นตอน



ภาพที่ 19 แสดงการหาขีดจำกัดของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 3 ของคุณ

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 3 ของคุณ

จากภาพที่ 19 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : คุณมีวิธีในการหาค่าตอบจากกราฟได้อย่างไร

คุณ : ดูจุดแต่ละจุดที่เส้นกราฟลากผ่าน

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น คุณสามารถหาค่าตอบจากกราฟของฟังก์ชัน

จงหาค่าของ

3.1) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \dots 1 \dots$	3.2) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \dots$
3.3) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \dots$	3.4) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \dots -1 \dots$
3.5) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \dots -1 \dots$	3.6) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \dots 1 \dots$
3.7) $f(-1) = \dots$	3.8) $f(3) = \dots -1 \dots$

ภาพที่ 20 แสดงการหาขีดจำกัดของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 3 ของคุณ

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 3 ของตุล

จากภาพที่ 20 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาลิมิตของฟังก์ชัน

ตุล : หาค่า $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ จากกราฟ

ผู้วิจัย : ตูลหาค่า $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ได้อย่างไร

ตุล : จากนิยาม ถ้า $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = L$

ผู้วิจัย : แล้วทำอย่างไรต่อ

ตุล : หาค่า $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ มีค่าเท่าไร

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

ตุล : ดูจากกราฟแล้วหาคำตอบ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

ผู้วิจัย : แล้วทำอย่างไรต่อ

ตุล : หาคำตอบของ $f(-1)$ และ $f(3)$ จากกราฟ

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ตูลสามารถหาค่าฟังก์ชันจากกราฟแล้วหาค่า $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$,

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ จากสมการและจากนิยามถ้า $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = L$ และ

หาค่า $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ จากสมการและจากนิยามถ้า $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = L$ แล้ว

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = L$ และหาค่า $f(-1)$ และ $f(3)$ ได้ ถูกต้องครบทุกขั้นตอน

<p>3.9 ฟังก์ชันที่กำหนดให้ไม่ต่อเนื่องที่จุดใดบ้างเพราะเหตุใด</p> <p>ฟังก์ชันใดต่อเนื่อง $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$</p>	<p>3.8 $f(3) = \dots$</p>
---	--------------------------------------

ภาพที่ 21 แสดงการหาลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 3 ของตุล

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 3 ของตุล

จากภาพที่ 21 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

ตุล : ดูจากโจทย์ฟังก์ชันที่กำหนดให้ไม่ต่อเนื่องที่จุดใดบ้าง

ผู้วิจัย : นักเรียนหาคำตอบจากไหน

ตุล : ดูจากกราฟจะได้ว่า ลิมิตของฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x=3$

เพราะกราฟที่ $x=3$ กราฟขาดช่วงทำให้หาค่าของลิมิตไม่ได้

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ตูลสามารถหาค่าฟังก์ชันจากกราฟจะได้ว่า ลิมิตของฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x=3$ เพราะกราฟที่ $x=3$ กราฟขาดช่วงทำให้หาค่าของลิมิตไม่ได้

3.10 ฟังก์ชันที่กำหนดให้คือต่อเนื่องบนช่วงต่อไปนี้หรือไม่เพราะเหตุใด

1.) $[-1,2]$ ตอบ... *ต่อเนื่อง* ... เพราะ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ X

2.) $[-1,3]$ ตอบ... *ต่อเนื่อง* ... เพราะ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ /

ภาพที่ 22 แสดงการหาลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 3 ของตุล

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 3 ของตุล

จากภาพที่ 22 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาค่าตอบอย่างไร

ตุล : ดูจากโจทย์ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อเนื่องบนช่วงใดบ้าง

ผู้วิจัย : นักเรียนหาค่าตอบจากไหน

ตุล : ดูจากกราฟจะได้ว่า ลิมิตของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-1,2]$

และไม่ต่อเนื่องบนช่วง $[-1,3]$

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ตูลสามารถหาค่าลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันจากกราฟ ลิมิตของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-1,2]$ และไม่ต่อเนื่องบนช่วง $[-1,3]$ แต่ตุลให้เหตุผลผิดเพราะดูกราฟไม่เป็นและไม่เข้าใจนิยามความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ข้อ 4. กำหนด $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$; $x \neq 1$ จงพิจารณาว่าฟังก์ชันนี้ต่อเนื่องที่ $x=1$ หรือไม่
 $\frac{x}{x+1}$; $x=1$ (แสดงวิธีทำ 5 คะแนน)

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x}{x+1}$; $x=1$

โดย $f(x) = \frac{x}{x+1}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1

$$f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

∴ ฟังก์ชันนี้มีความต่อเนื่องที่ $x=1$ A.ก.อ.

ภาพที่ 23 แสดงการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 4 ของคุณ

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 4 ของคุณ

จากภาพที่ 23 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

คุณ : ดูจากโจทย์ฟังก์ชันเพื่อพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อเนื่องที่ $x=1$

ผู้วิจัย : นักเรียนทำอย่างไรต่อ

คุณ : จากบทนิยามฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชัน หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ได้ หา $f(c)$ ได้

และ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ จึงจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=1$

ผู้วิจัย : นักเรียนหาคำตอบจากไหน

คุณ : หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ จากสมการ $f(x) = \frac{x}{x+1}$ และ หา $f(c)$

จากสมการ $\frac{x}{x+1}$

ผู้วิจัย : นักเรียนทำอย่างไรต่อ

คุณ : แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=1$ จบการหาคำตอบ

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น คุณสมารถหาค่าความต่อเนื่องของฟังก์ชัน จากทนิยาม ฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชัน หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ได้ หา $f(c)$ ได้ แต่ไม่เข้าใจเงื่อนไขและวิธีหาคำตอบ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ จึงทำให้คุณ สรุปว่า f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$

ข้อ 5. กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 4 ; x \leq -1$
 $x + a ; -1 < x < 3$
 $3x + b ; x \geq 3$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง $[-1, 3]$ จงหาค่าของ $a + b$ (แสดงวิธีทำ 7 คะแนน)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = -1$
 ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$
 $(-1)^2 + 4 = (-1) + a$
 $a = 6$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 3$
 ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$
 $3 + a = 3(3) + b$
 $b = 0$

ดังนั้น $a + b = 6 + 0 = 6$ Ans

ภาพที่ 24 แสดงการหาลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 5 ของคุณ

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 5 ของคุณ

จากภาพที่ 24 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

คุณ : ดูบทนิยามฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชัน หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ได้ หา $f(c)$ ได้

และ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ จึงจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = c$

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบได้อย่างไร

คุณ : หาค่าของ $f(x) = x^2 + 4$ เท่ากับ $f(x) = x + a$ เพื่อหาค่า a โดยดูจากเงื่อนไขที่โจทย์

กำหนดให้

ผู้วิจัย : นักเรียนทำอย่างไรต่อ

ครู : หาค่า $f(x) = x+a$ เท่ากับ $f(x) = 3x+b$ เพื่อหาค่า b โดยดูจากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้

ผู้วิจัย : นักเรียนทำอย่างไรต่อ

ครู : จากนั้นนำค่า $a+b$ เพื่อหาคำตอบ

ผู้วิจัย : ทำไมนักเรียนจึงนำสมการ $f(x) = x^2+4$ และ สมการ $f(x) = x+a$ เท่ากัน และสมการ $f(x) = x+a$ เท่ากับ สมการ $f(x) = 3x+b$

ครู : เพราะจากโจทย์ f ฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง $[-1,3]$

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ครูสามารถหาค่าความต่อเนื่องของฟังก์ชัน จากทฤษฎีฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชัน หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ได้ หา $f(c)$ ได้ และ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ จึงจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = c$

1.3 กลุ่มเก่งคนที่ 3 กฤต

ตารางที่ 13 ระดับความเข้าใจจากการทำแบบทดสอบทั้ง 5 ข้อ ของกฤต

ข้อ	ระดับความเข้าใจ		
	การจัดกระทำ	กระบวนการ	โครงสร้าง
1	จำแนกและเข้าใจสัญลักษณ์ของฟังก์ชัน ในการแทนค่าของฟังก์ชันและนำมาเขียนกราฟได้	หาค่า $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้	-
2	ดูกราฟแล้วหาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$	ไม่สามารถหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน ค่าลิมิตของฟังก์ชันด้านซ้ายและด้านขวาได้	-
3	ดูกราฟแล้วหาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$	ไม่สามารถหาค่าของฟังก์ชัน $f(-1)$ และ $f(3)$ และค่าลิมิตของฟังก์ชันด้านซ้ายและด้านขวา และค่าลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ $x=c$ ได้	ไม่สามารถหาค่าความต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ ได้

ข้อ	ระดับความเข้าใจ		
	การจัดกระทำ	กระบวนการ	โครงสร้าง
4	หาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$	ไม่สามารถหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้	- ไม่สามารถใช้นิยามหาค่าความต่อเนื่องฟังก์ชัน บนช่วง $[a,b]$
5	หาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$	ไม่สามารถหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้	- ไม่สามารถใช้นิยามหาค่าความต่อเนื่องฟังก์ชัน บนช่วง $[a,b]$

จากตารางที่ 13 พบว่า ระดับความเข้าใจในการหาค่าตอบทั้ง 5 ข้อของกฤตมีระดับความเข้าใจ ข้อที่ 1 มีระดับความเข้าใจ 2 ระดับคือ ระดับการจัดกระทำและระดับกระบวนการ ข้อที่ 2 มีระดับความเข้าใจ 1 ระดับคือ ระดับการจัดกระทำ ส่วนระดับกระบวนการไม่มีความเข้าใจ ข้อที่ 3 - ข้อที่ 5 มีระดับความเข้าใจ 1 ระดับ คือ ระดับการจัดกระทำ ส่วนระดับกระบวนการและระดับโครงสร้างไม่มีความเข้าใจ

จากแบบทดสอบข้อที่ 1 กระบวนการสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ข้อ 1 กำหนด $f(x) = x^2 - x + 4$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ และเขียนกราฟ (แสดงวิธีทำ 5 คะแนน)

x	f(x)	x	f(x)
1.0	4.000000	3.0	10.000000
1.5	4.750000	2.5	7.750000
1.8	5.440000	2.2	6.640000
1.9	5.710000	2.1	6.310000
1.95	5.852500	2.05	6.152500
1.99	5.970100	2.01	6.030100
1.995	5.985025	2.005	6.015025
1.999	5.997001	2.001	6.003001

ภาพที่ 25 แสดงการหาลิมิตของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 1 ของกฤต

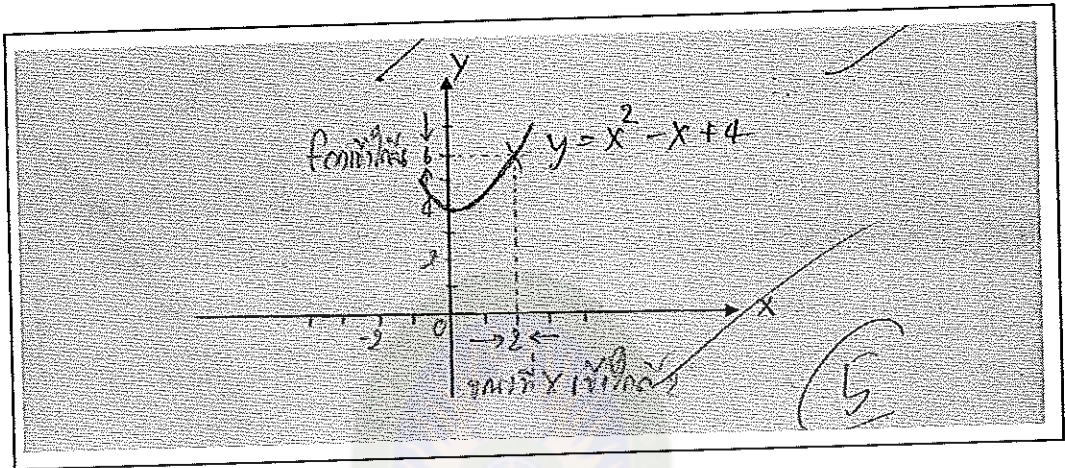
และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 1 ของกฤต

จากภาพที่ 25 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจในการแปลความหมายของข้อมูล

ผู้วิจัย : กฤตมีวิธีในการแทนค่า x เพื่อหา $f(x)$ อย่างไร

กฤต : นำค่า x ที่ได้ แทนในสมการ $f(x) = x^2 - x + 6$ แล้วนำค่า $f(x)$ ที่ได้เขียนลงในตาราง

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น กฤตสามารถแสดงวิธีการแทนค่าฟังก์ชันลงในตาราง โดยการแทนค่า x ที่ได้ แทนในสมการ $f(x) = x^2 - x + 6$ แล้วนำค่า $f(x)$ ที่ได้เขียนลงในตาราง



ภาพที่ 26 แสดงการหาขีดจำกัดของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 1 ของกฤต

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 1 ของกฤต

จากภาพที่ 26 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : กฤตมีวิธีในการนำค่า x และ $f(x)$ จากตารางมาเขียนกราฟของฟังก์ชัน ได้อย่างไร

กฤต : สร้าง แกน x และ แกน y

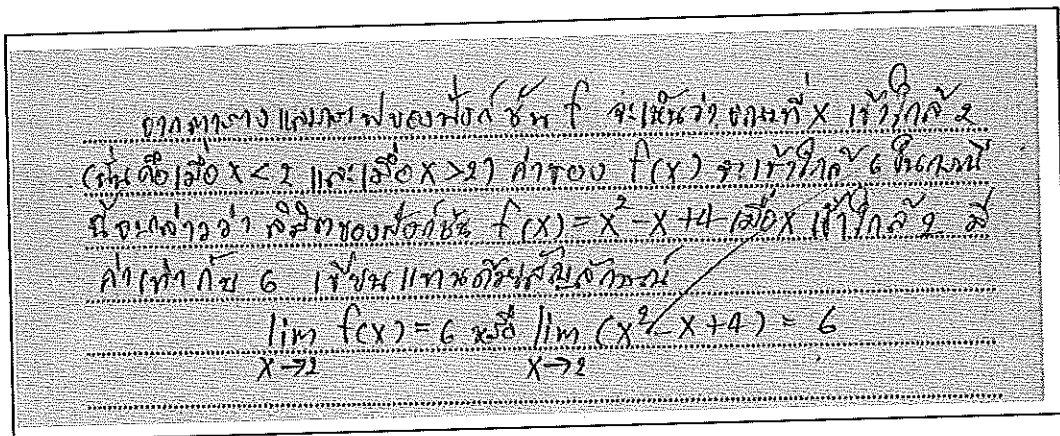
ผู้วิจัย : กฤตมีวิธีในการนำค่า x และ $f(x)$ มาเขียนกราฟอย่างไร

กฤต : หาค่า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ จากกราฟ

ผู้วิจัย : กฤตหาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้อย่างไร

กฤต : แทนค่า x และ $f(x)$ ลงในกราฟ แล้วลากเส้นกราฟของฟังก์ชัน

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น กฤตสามารถแสดงวิธีการแทนค่าฟังก์ชันลงในกราฟของฟังก์ชัน
ได้ถูกต้องครบทุกขั้นตอน



ภาพที่ 27 แสดงการหาขีดจำกัดของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 1 ของกฤต

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 1 ของกฤต

จากภาพที่ 27 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการแก้สมการของฟังก์ชัน

กฤต : หาค่า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ จากกราฟ

ผู้วิจัย : กฤตหาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้อย่างไร

กฤต : จากนิยาม ถ้า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$

ผู้วิจัย : แล้ว $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ มีค่าเท่าไร

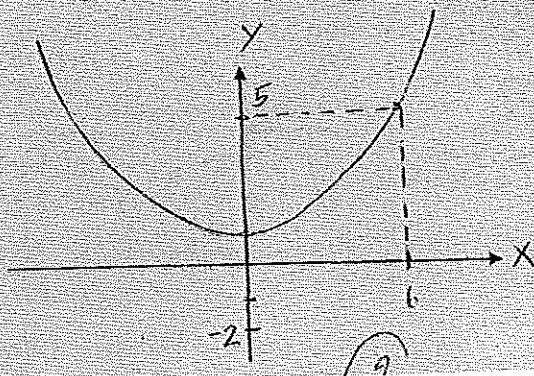
กฤต : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 6$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6$

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น กฤตสามารถแสดงวิธีการแทนค่าฟังก์ชันลงในกราฟ แล้วหาค่า

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ จากกราฟและจากนิยามถ้า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = L$ แล้ว

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$ ได้ถูกต้องครบทุกขั้นตอน

ข้อ 2 กำหนดให้ $f(x) = \frac{(x+2)^2}{16} + 1$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$
โดยการใช้กราฟ (แสดงวิธีทำ 4 คะแนน)



ภาพที่ 28 แสดงการหาขีดจำกัดของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 2 ของกฤต

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 2 ของกฤต

จากภาพที่ 28 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการแก้สมการของฟังก์ชัน

กฤต : หาค่า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ จากกราฟ

ผู้วิจัย : กฤตหาค่า $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$ ได้อย่างไร

กฤต : จากนิยาม ถ้า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = L$

ผู้วิจัย : แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ มีค่าเท่าไร

กฤต : $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = 5$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 5$

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น กฤตสามารถหาค่าฟังก์ชันจากกราฟ แล้วหาค่า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$,

$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ จากกราฟและจากนิยาม ถ้า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = L$ ได้

ถูกต้องครบทุกขั้นตอน

ภาพที่ 29 แสดงการหาขีดจำกัดของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 2 ของกฤต

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 2 ของกฤต

จากภาพที่ 29 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการแก้สมการของฟังก์ชัน

กฤต : หาค่า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ จากสมการ

ผู้วิจัย : กฤตหาค่า $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$ ได้อย่างไร

กฤต : แทนค่า $x=6$ ในสมการ ได้ค่า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$ และ ได้ค่า $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ เท่ากับ 5

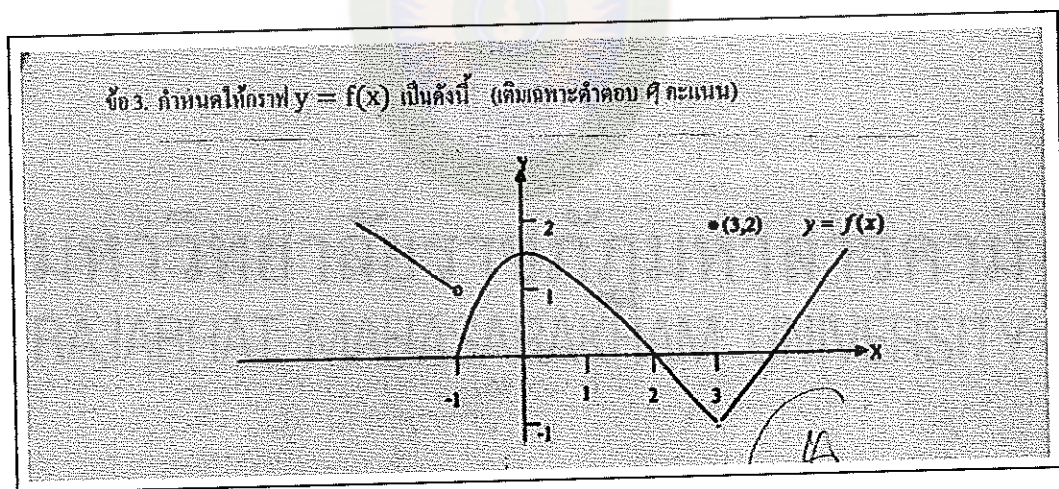
ผู้วิจัย : แล้วทำอย่างไรต่อ

กฤต : จบแล้ว

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น กฤตสามารถหาค่าฟังก์ชันจากสมการ แล้วหาค่า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$,

$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ จากสมการ แต่ไม่เข้าใจนิยามลิมิตของฟังก์ชัน

ถ้า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = L$ ได้



ภาพที่ 30 แสดงการหาลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 3 ของกฤต

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 3 ของกฤต

จากภาพที่ 30 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : กฤตมีวิธีในการหาคำตอบจากกราฟได้อย่างไร

กฤต : ดูจุดแต่ละจุดที่เส้นกราฟลากผ่าน

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น กฤตสามารถหาคำตอบจากกราฟของฟังก์ชัน

จงหาค่าของ	
3.1) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) =$	1 ✓
3.3) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$	หาค่าไม่ได้ ✓
3.5) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$	2 ✓
3.7) $f(-1) =$	-1 ✗
3.2) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$	1 ✗
3.4) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$	หาค่าไม่ได้ ✗
3.6) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$	-1 ✓
3.8) $f(3) =$	3 ✗

ภาพที่ 31 แสดงการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 3 ของกฤต

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 3 ของกฤต

จากภาพที่ 31 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาขีดจำกัดของฟังก์ชัน

กฤต : หาค่า $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ จากกราฟ

ผู้วิจัย : กฤตหาค่า $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ได้อย่างไร

กฤต : จากกราฟ $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ผู้วิจัย : แล้วทำอย่างไรต่อ

กฤต : หาค่า $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ หาค่าไม่ได้, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2$

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ อย่างไร

กฤต : ดูจากกราฟแล้วหาคำตอบ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -1$

ผู้วิจัย : แล้วทำอย่างไรต่อ

กฤต : หาคำตอบของ $f(-1)$ และ $f(3)$ จากกราฟ

ผู้วิจัย : แล้วทำอย่างไรต่อ

กฤต : จบแล้ว

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น กฤตสามารถหาค่าฟังก์ชันจากกราฟแล้วหาค่า $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$,

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ จากสมการได้ แต่กฤตไม่เข้าใจนิยามขีดจำกัดของฟังก์ชัน ถ้า $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$

L แล้ว $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = L$ ทำให้กฤตหาค่าของขีดจำกัดของฟังก์ชันไม่ได้ และหาค่า $f(-1)$ และ $f(3)$

ไม่ได้ เพราะไม่เข้าใจขีดจำกัดของฟังก์ชัน

3.9 ฟังก์ชันที่กำหนดให้ไม่ต่อเนื่องที่จุดใดบ้างเพราะเหตุใด
 $[-1, 3]$ เพราะกราฟไม่ติดกัน

ภาพที่ 32 แสดงการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 3 ของกฤต

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 3 ของกฤต

จากภาพที่ 32 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

กฤต : ดูจากโจทย์ฟังก์ชันที่กำหนดให้ไม่ต่อเนื่องที่จุดใดบ้าง

ผู้วิจัย : นักเรียนหาคำตอบจากไหน

กฤต : ดูจากกราฟจะได้ว่า ขีดจำกัดของฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $[-1, 3]$

เพราะกราฟไม่ติดกัน

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น กฤตสามารถหาค่าฟังก์ชันจากกราฟจะได้ว่า ขีดจำกัดของฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $[-1, 3]$ เพราะกราฟไม่ติดกันไม่ถูกต้อง เพราะ

กฤตไม่เข้าใจนิยามขีดจำกัดของฟังก์ชัน และฟังก์ชันต่อเนื่องทำให้หาไม่ได้

3.10 ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อเนื่องบนช่วงต่อไปนี้หรือไม่เพราะเหตุใด

1) $[-1, 2]$ ตอบ...ต่อเนื่อง เพราะ กราฟเป็นจุดติดกัน

2) $[-1, 3]$ ตอบ...ฟังก์ชันต่อเนื่อง เพราะ กราฟไม่ติดกัน

ภาพที่ 33 แสดงการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 3 ของกฤต

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 3 ของกฤต

จากภาพที่ 33 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

กฤต : ดูจากโจทย์ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อเนื่องบนช่วงใดบ้าง

ผู้วิจัย : นักเรียนหาคำตอบจากไหน

กฤต : ดูจากกราฟจะได้ว่า ลิมิตของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [-1,2]

และไม่ต่อเนื่องบนช่วง [-1,3]

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น กฤตสามารถหาค่าลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันจากกราฟ ลิมิตของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [-1,2] และไม่ต่อเนื่องบนช่วง [-1,3] แต่ให้เหตุผลไม่ถูกต้องเพราะดู กราฟไม่เป็น

ข้อ 4. กำหนด $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$; $x \neq 1$ จงพิจารณาว่าฟังก์ชันนี้ต่อเนื่องที่ $x = 1$ หรือไม่
 (แสดงวิธีทำ 5 คะแนน)

วิธีทำ $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$

ตอบ ฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$

Handwritten notes on the right side of the page:
 $x-1$
 $x \neq 1$
 $\sqrt{x^2+3}$
 $= 1-1$
 $\sqrt{1^2+3}-2$
 $= 0$
 $\sqrt{2}$
 หมายความว่าไม่ต่อเนื่อง

ภาพที่ 34 แสดงการหาลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 4 ของกฤต

และจากการสัมภาษณ์ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 4 ของกฤต

จากแผนภาพ ผู้วิจัย ได้ตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

กฤต : ดูจากโจทย์ฟังก์ชันเพื่อพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อเนื่องที่ $x = 1$

ผู้วิจัย : นักเรียนทำอย่างไรต่อ

กฤต : จากบทนิยามฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชัน หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ได้ หา $f(c)$ ได้

และ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ จึงจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$

ผู้วิจัย : หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ และ $f(c)$

กฤต : หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ จากสมการ $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$ และ หา $f(c)$

จากสมการ $\frac{x}{x+1}$

ผู้วิจัย : นักเรียนทำอย่างไรต่อ

กฤต : ถ้า $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} = f(c)$ แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=1$

ผู้วิจัย : ถ้า $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} \neq f(c)$ ไม่เท่ากันแสดงว่า f เป็นอย่างไร

กฤต : แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x=1$ เพราะกฤตแก้สมการ

$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$ ผิด ไม่เอาสัญลักษณ์ของฟังก์ชันมาช่วยแก้สมการทำให้คำตอบที่ได้ผิด

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น กฤตสามารถหาค่าความต่อเนื่องของฟังก์ชัน จากบทนิยาม ฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชัน หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ไม่ได้เพราะแก้สมการผิด กฤตไม่ใช่สัญลักษณ์มาใช้ในการแก้สมการจึงได้คำตอบผิด หา $f(c)$ ได้ และ

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq f(c)$ f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x=1$

ข้อ 5. กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 4 ; x \leq -1$
 $x + a ; -1 < x < 3$
 $3x + b ; x \geq 3$
 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-1, 3]$ จงหาค่าของ $a + b$ (แสดงวิธีทำ ย ะบน)

$f(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$
 $y + a = \lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 4$
 แทนค่า $f(-1)$ ได้ $-1 + a = (-1)^2 + 4$
 $a = 1 + 4 + 1$
 $= 6$

แทนค่า $y + a = \lim_{x \rightarrow 3} 3x + b$
 แทนค่า $f(3)$ ได้ $3 + b = 3(3) + b$
 $b = 9 - 9 = 0$
 ต่อให้ $a + b = 6 + 0 = 6$

ภาพที่ 35 แสดงการหาลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 5 ของกฤต

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 5 ของกฤต

จากภาพที่ 35 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

กฤต : ดูทฤษฎีบทฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชัน หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ได้ หา $f(c)$ ได้

และ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ จึงจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = c$

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบได้อย่างไร

กฤต : หาค่าของ $f(x) = x^2 + 4$ เท่ากับ $f(x) = x + a$ เพื่อหาค่า a โดยดูจากเงื่อนไขที่โจทย์

กำหนดให้

ผู้วิจัย : นักเรียนทำอย่างไรต่อ

กฤต : หาค่า $f(x) = x + a$ เท่ากับ $f(x) = 3x + b$ เพื่อหาค่า b โดยดูจากเงื่อนไขที่โจทย์

กำหนดให้

ผู้วิจัย : นักเรียนทำอย่างไรต่อ

กฤต : จากนั้นนำค่า $a + b$ เพื่อหาคำตอบ

ผู้วิจัย : ทำไมนักเรียนจึงนำสมการ $f(x) = x^2 + 4$ และ สมการ $f(x) = x + a$ เท่ากัน และสมการ

$f(x) = x + a$ เท่ากับ สมการ $f(x) = 3x + b$

กฤต : เพราะจากโจทย์ f ฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง $[-1, 3]$

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น กฤตสามารถหาค่าความต่อเนื่องของฟังก์ชัน จากทฤษฎีบทฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชัน หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ได้ หา $f(c)$ ได้ และ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ จึงจะเป็น

ฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = c$

2. กลุ่มอ่อน

ผลการวิเคราะห์แบบทดสอบของกลุ่มอ่อน

ข้อที่ 1-2 มีระดับความเข้าใจ 2 ระดับ คือ ระดับการจัดกระทำ และระดับกระบวนการ

ข้อที่ 3-5 มีระดับความเข้าใจ 3 ระดับ คือ ระดับการจัดกระทำ ระดับกระบวนการและระดับ

โครงสร้างหลังจากตรวจแบบทดสอบ นักเรียนกลุ่มเก่ง ทั้ง 3 คน ปรากฏผลดังตารางที่ 14

ตารางที่ 14 ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์จากการทำแบบทดสอบของกลุ่มอ่อน

ข้อ ที่	ระดับความ เข้าใจ	พรรณ	ชด	ภัทร
1	การจัดกระทำ	จำแนกและเข้าใจ สัญลักษณ์ของฟังก์ชัน ในการแทนค่าของ ฟังก์ชันและนำมา เขียนกราฟได้	จำแนกและเข้าใจ สัญลักษณ์ของฟังก์ชัน ในการแทนค่าของ ฟังก์ชันและนำมา เขียนกราฟได้	จำแนกและเข้าใจ สัญลักษณ์ของฟังก์ชัน ในการแทนค่าของ ฟังก์ชันและนำมาเขียน กราฟได้
	กระบวนการ	หาค่า $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้	หาค่า $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้	หาค่า $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้
2	การจัดกระทำ	ดูกราฟแล้วหาค่าของ ฟังก์ชัน $f(x)$	ดูกราฟแล้วหาค่าของ ฟังก์ชัน $f(x)$	ดูกราฟแล้วหาค่าของ ฟังก์ชัน $f(x)$
	กระบวนการ	หาค่าลิมิตของฟังก์ชัน ค่าลิมิตของฟังก์ชัน ด้านซ้ายและด้านขวา ได้	ไม่สามารถหาค่าลิมิต ของฟังก์ชัน ค่าลิมิต ของฟังก์ชันด้านซ้าย และด้านขวาได้	ไม่สามารถหาค่าลิมิต ของฟังก์ชัน ค่าลิมิต ของฟังก์ชันด้านซ้าย และด้านขวา ได้
3	การจัดกระทำ	ดูกราฟแล้วหาค่าของ ฟังก์ชัน $f(x)$	ดูกราฟแล้วหาค่าของ ฟังก์ชัน $f(x)$	ดูกราฟแล้วหาค่าของ ฟังก์ชัน $f(x)$
	กระบวนการ	ไม่สามารถหาค่าของ ฟังก์ชัน $f(-1)$ และ $f(3)$ และค่าลิมิตของ ฟังก์ชันด้านซ้ายและ ด้านขวา และค่าลิมิต ของฟังก์ชัน เมื่อ $x=c$ ได้	ไม่สามารถหาค่าของ ฟังก์ชัน $f(-1)$ และ $f(3)$ และค่าลิมิตของ ฟังก์ชันด้านซ้ายและ ด้านขวา และค่าลิมิต ของฟังก์ชัน เมื่อ $x=c$ ได้	ไม่สามารถหาค่าของ ฟังก์ชัน $f(-1)$ และ $f(3)$ และค่าลิมิตของ ฟังก์ชันด้านซ้ายและ ด้านขวา และค่าลิมิต ของฟังก์ชัน เมื่อ $x=c$ ได้

ข้อ ที่	ระดับความ เข้าใจ	พรรณ	ชล	ภัทร
	โครงสร้าง	ไม่สามารถหาค่าความ ต่อเนื่องบน ช่วง $[a,b]$ ได้	ไม่สามารถหาค่าความ ต่อเนื่องบน ช่วง $[a,b]$ ได้	ไม่สามารถหาค่าความ ต่อเนื่องบน ช่วง $[a,b]$ ได้
4	การจัดกระทำ	ไม่สามารถหาค่าของ ฟังก์ชัน $f(x)$	ไม่สามารถหาค่าของ ฟังก์ชัน $f(x)$	ไม่สามารถหาค่าของ ฟังก์ชัน $f(x)$
	กระบวนการ	ไม่สามารถหาค่าลิมิต ของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้	ไม่สามารถหาค่าลิมิต ของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้	ไม่สามารถหาค่าลิมิต ของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้
	โครงสร้าง	- ไม่สามารถใช้นิยาม หาค่าความต่อเนื่อง ฟังก์ชัน บนช่วง $[a,b]$	- ไม่สามารถใช้นิยาม หาค่าความต่อเนื่อง ฟังก์ชัน บนช่วง $[a,b]$	- ไม่สามารถใช้นิยาม หาค่าความต่อเนื่อง ฟังก์ชัน บนช่วง $[a,b]$
5	การจัดกระทำ	ไม่สามารถหาค่าของ ฟังก์ชัน $f(x)$	ไม่สามารถหาค่าของ ฟังก์ชัน $f(x)$	ไม่สามารถหาค่าของ ฟังก์ชัน $f(x)$
	กระบวนการ	ไม่สามารถหาค่าลิมิต ของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้	ไม่สามารถหาค่าลิมิต ของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้	ไม่สามารถหาค่าลิมิต ของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้
	โครงสร้าง	- ไม่สามารถใช้นิยาม หาค่าความต่อเนื่อง ฟังก์ชัน บนช่วง $[a,b]$	- ไม่สามารถใช้นิยาม หาค่าความต่อเนื่อง ฟังก์ชัน บนช่วง $[a,b]$	- ไม่สามารถใช้นิยาม หาค่าความต่อเนื่อง ฟังก์ชัน บนช่วง $[a,b]$

จากตารางที่ 14 พบว่า ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ในการหาคำตอบข้อที่ 1 ของนักเรียนกลุ่มอ่อน ทั้ง 3 คน มีระดับความเข้าใจ 2 ระดับ คือ ระดับการจัดกระทำและระดับกระบวนการ ข้อที่ 2 พรรณ มีระดับความเข้าใจ 2 ระดับ คือ ระดับการจัดกระทำและระดับกระบวนการ แต่ชลกับภัทร มีระดับความเข้าใจ 1 ระดับ คือ ระดับการจัดกระทำ ส่วนระดับกระบวนการไม่เข้าใจ ข้อที่ 3 มีระดับความเข้าใจ 1 ระดับ คือ ระดับการจัดกระทำ ส่วนระดับกระบวนการและระดับโครงสร้างไม่มีความเข้าใจ ข้อที่ 4-5 ทั้ง 3 คน ไม่เข้าใจทั้ง 3 ระดับ คือ ระดับการจัดกระทำ ระดับกระบวนการและระดับโครงสร้าง

2.1 กลุ่มอ่อนคนที่ 1 พรรณ

ตารางที่ 15 ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์จากการทำแบบทดสอบทั้ง 5 ข้อ ของพรรณ

ข้อ	ระดับความเข้าใจ		
	การจัดกระทำ	กระบวนการ	โครงสร้าง
1	จำแนกและเข้าใจ สัญลักษณ์ของ ฟังก์ชัน ในการแทน ค่าของฟังก์ชันและ นำมาเขียนกราฟได้	หาค่า $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้	-
2	ดูกราฟแล้วหาค่าของ ฟังก์ชัน $f(x)$	หาค่าลิมิตของฟังก์ชัน ค่าลิมิต ของฟังก์ชันด้านซ้ายและ ด้านขวาได้	-
3	ดูกราฟแล้วหาค่าของ ฟังก์ชัน $f(x)$	ไม่สามารถหาค่าของฟังก์ชัน $f(-1)$ และ $f(3)$ และค่าลิมิต ของฟังก์ชันด้านซ้ายและ ด้านขวา และค่าลิมิตของ ฟังก์ชัน เมื่อ $x=c$ ได้	ไม่สามารถหาค่าความต่อเนื่องบน ช่วง $[a,b]$ ได้
4	หาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$	ไม่สามารถหาค่าลิมิตของ ฟังก์ชัน $f(x)$ ได้	- ไม่สามารถใช้นิยามหาค่าความ ต่อเนื่องฟังก์ชัน บนช่วง $[a,b]$
5	หาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$	ไม่สามารถหาค่าลิมิตของ ฟังก์ชัน $f(x)$ ได้	- ไม่สามารถใช้นิยามหาค่าความ ต่อเนื่องฟังก์ชัน บนช่วง $[a,b]$

จากตารางที่ 15 พบว่า ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์การหาค่าตอบทั้ง 5 ข้อของพรรณ
ข้อที่ 1-ข้อที่ 2 มีความเข้าใจ 2 ระดับคือ ระดับการจัดกระทำและระดับกระบวนการ ข้อที่ 3-ข้อที่ 5 มี
ระดับความเข้าใจ 1 ระดับ คือ ระดับการจัดกระทำ ไม่มีความเข้าใจระดับกระบวนการและระดับ
โครงสร้าง

จากแบบทดสอบข้อที่ 1 กระบวนการสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับความหมายของลิมิตของฟังก์ชัน

ข้อ 1. กำหนด $f(x) = x^2 - x + 4$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ และเขียนกราฟ (แสดงวิธีทำ 5 คะแนน)

x	f(x)
1.0	4
1.5	4.75
1.8	5.44
1.9	5.71
1.95	5.8525
1.99	5.9701
1.995	5.985025
1.999	5.997001

5

x	f(x)
3.0	10
2.5	7.75
2.2	6.64
2.1	6.31
2.05	6.1525
2.01	6.0301
2.005	6.015025
2.001	6.003001

ภาพที่ 36 แสดงการหาลิมิตของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 1 ของพรณ

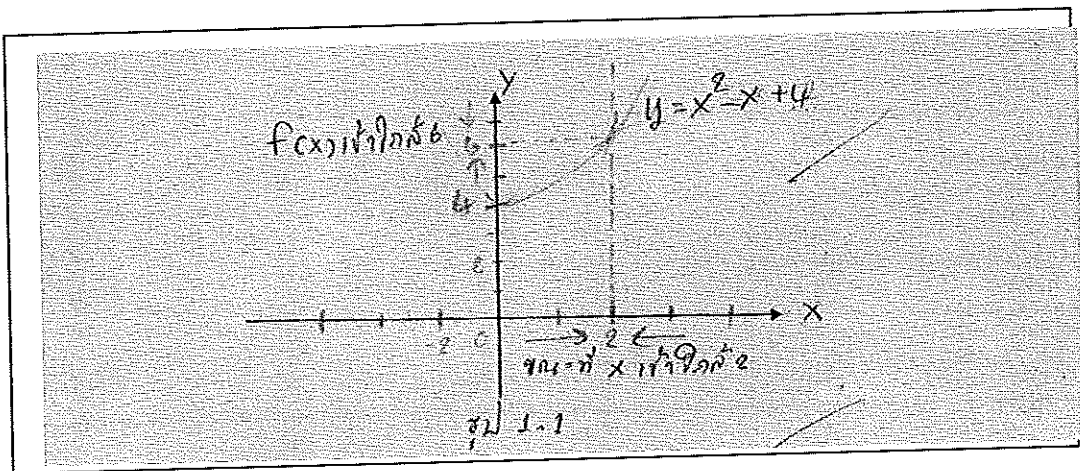
และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 1 ของพรณ

จากภาพที่ 36 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจในการแปลความหมายของข้อมูลจากตาราง

ผู้วิจัย : พรณมีวิธีการแทนค่า x เพื่อหา f(x) อย่างไร

พรณ : นำค่า x ที่ได้แทนในสมการ $f(x) = x^2 - x + 6$ แล้วนำค่า f(x) ที่ได้เขียนลงในตาราง

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น พรณสามารถแสดงวิธีการแทนค่าฟังก์ชันลงในตาราง โดยการแทนค่า x ที่ได้แทนในสมการ $f(x) = x^2 - x + 6$ แล้วนำค่า f(x) ที่ได้เขียนลงในตาราง



ภาพที่ 37 แสดงการหาลิมิตของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 1 ของพรณ

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 1 ของพรรณ

จากภาพที่ 37 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : พรรณมีวิธีในการนำค่า x และ $f(x)$ จากตารางมาเขียนกราฟของฟังก์ชันได้อย่างไร

พรรณ : สร้าง แกน x และ แกน y

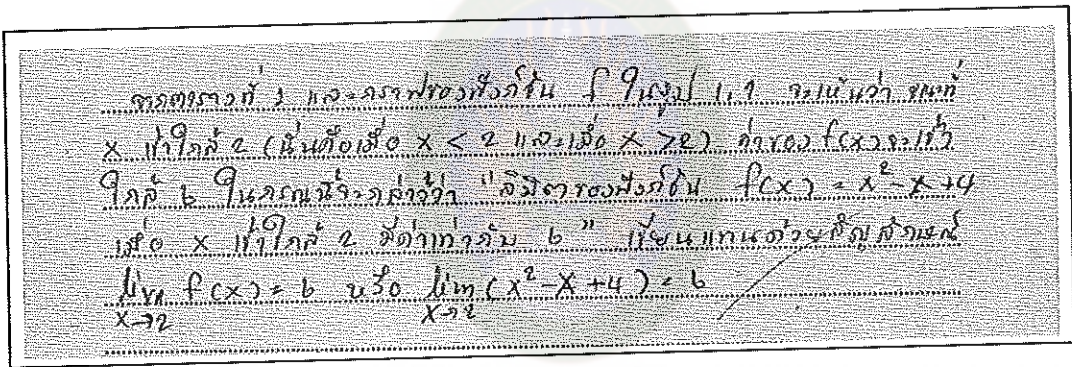
ผู้วิจัย : พรรณมีวิธีในการนำค่า x และ $f(x)$ มาเขียนกราฟอย่างไร

พรรณ : หาค่า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ จากกราฟ

ผู้วิจัย : พรรณหาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้อย่างไร

พรรณ : แทนค่า x และ $f(x)$ ลงในกราฟแล้วลากเส้นกราฟของฟังก์ชัน

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น พรรณสามารถแสดงวิธีการแทนค่าฟังก์ชันลงในกราฟของฟังก์ชัน ได้ถูกต้องครบทุกขั้นตอน



ภาพที่ 38 แสดงการหาลิมิตของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 1 ของพรรณ

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 1 ของพรรณ

จากภาพที่ 38 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการแก้สมการของฟังก์ชัน

พรรณ : หาค่า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ จากกราฟ

ผู้วิจัย : พรรณหาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้อย่างไร

พรรณ : จากนิยาม ถ้า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$

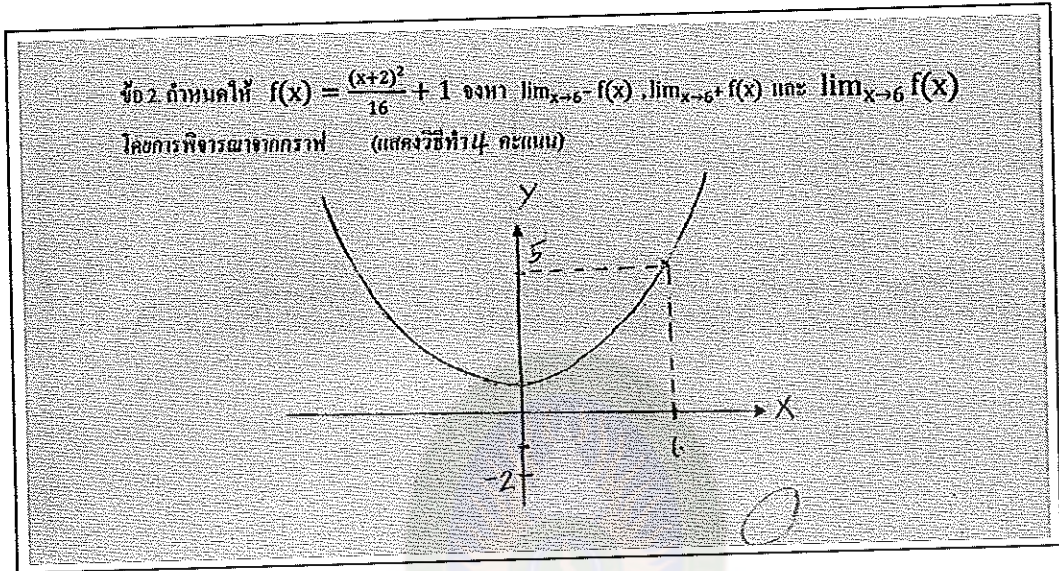
ผู้วิจัย : แล้ว $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ มีค่าเท่าไร

พรรณ : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 6$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6$

จากผลการสัมพัทธ์ข้างต้น พรณสามารถแสดงวิธีการแทนค่าฟังก์ชันลงในกราฟ แล้วหาค่า

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \text{ จากกราฟและจากนิยามถ้า } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = L \text{ แล้ว}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L \text{ ได้ถูกต้องครบทุกขั้นตอน}$$



ภาพที่ 39 แสดงการหาขีดจำกัดของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 2 ของพรณ

และจากการสัมพัทธ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 2 ของพรณ

จากภาพที่ 39 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการแก้สมการของฟังก์ชัน
พรณ : หาค่า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ จากกราฟ

ผู้วิจัย : พรณหาค่า $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$ ได้อย่างไร

พรณ : ไม่เข้าใจนิยาม ถ้า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = L$ ไม่รู้

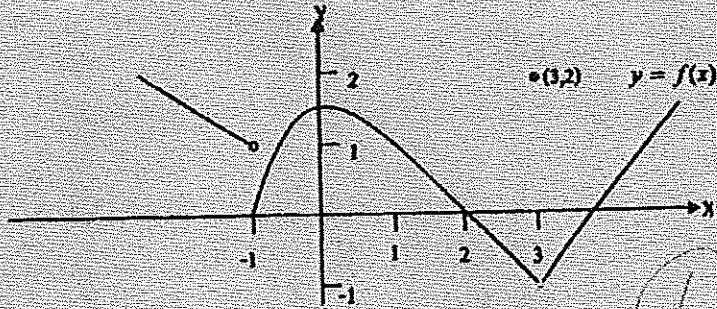
ขั้นตอนวิธีการหาค่าตอบทำให้พรณหาค่าตอบไม่ได้

จากผลการสัมพัทธ์ข้างต้น พรณไม่สามารถหาค่าฟังก์ชันจากกราฟ แล้วไม่สามารถหาค่า

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) \text{ จากกราฟและไม่เข้าใจนิยามถ้า } \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = L \text{ แล้ว}$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = L \text{ ทำให้พรณหาค่าตอบขีดจำกัดของฟังก์ชันข้อนี้ไม่ได้}$$

ข้อ 3. กำหนดให้กราฟ $y = f(x)$ เป็นดังนี้ (คิดเฉพาะค่าตอบ ๔ คะแนน)



ภาพที่ 40 แสดงการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 3 ของพรหม

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 3 ของพรหม

จากภาพที่ 40 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : พรหมมีวิธีการหาคำตอบจากกราฟได้อย่างไร

พรหม : ดูจุดแต่ละจุดที่เส้นกราฟลากผ่าน

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น พรหมสามารถหาคำตอบจากกราฟของฟังก์ชัน

จงหาค่าของ

3.1) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \dots\dots\dots 1 \dots\dots\dots$

3.2) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \dots\dots\dots 1 \dots\dots\dots$

3.3) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \dots\dots\dots \text{ขาดไปไม่เจอ} \dots\dots\dots$

3.4) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \dots\dots\dots \text{ขาดไปไม่เจอ} \dots\dots\dots$

3.5) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \dots\dots\dots 1 \dots\dots\dots$

3.6) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \dots\dots\dots 1 \dots\dots\dots$

3.7) $f(-1) = \dots\dots\dots 4 \dots\dots\dots$

3.8) $f(3) = \dots\dots\dots 1 \dots\dots\dots$

ภาพที่ 41 แสดงการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 3 ของพรหม

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 3 ของพรหม

จากภาพที่ 41 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาขีดจำกัดของฟังก์ชัน

พรหม : หาค่า $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ จากกราฟ

ผู้วิจัย : พรหมหาค่า $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ได้อย่างไร

พรหม : หาได้จากกราฟ ถ้า $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = L_1$

ผู้วิจัย : แล้วทำอย่างไรต่อ

พรรณ : หาค่า $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = L_1$

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

พรรณ : ดูจากกราฟแล้วหาคำตอบ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

ผู้วิจัย : แล้วทำอย่างไรต่อ

พรรณ : หาคำตอบของ $f(-1)$ และ $f(3)$ จากกราฟ

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น พรรณสามารถหาค่าฟังก์ชันจากกราฟ แล้วหาค่า $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$,

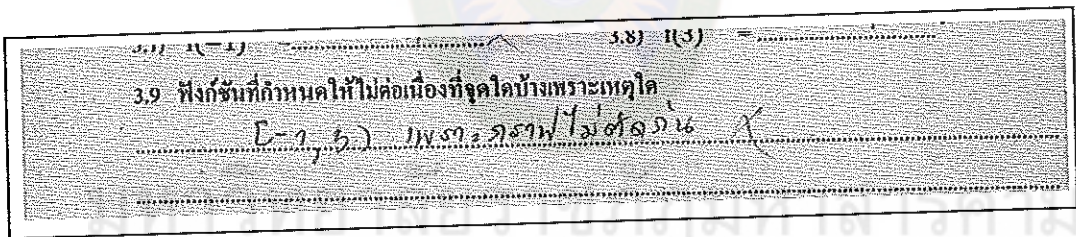
$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ จากสมการและจากนิยามถ้า $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = L_1$ ซึ่ง

เป็นความเข้าใจที่ผิด และหาค่า $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ จากสมการและจากนิยามถ้า $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = L_1$ ซึ่งเป็นความเข้าใจที่ผิด จึงทำให้หาคำตอบของสมการไม่

ถูกต้อง เพราะที่ถูกต้องนิยามถ้า $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = L$ และหาค่า $f(-$

$1)$ และ $f(3)$ ก็ไม่ถูกต้องเพราะดูกราฟไม่ถูกต้อง



ภาพที่ 42 แสดงการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 3 ของพรรณ

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 3 ของพรรณ

จากภาพที่ 42 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

พรรณ : ดูจากโจทย์ฟังก์ชันที่กำหนดให้ไม่ต่อเนื่องที่จุดใดบ้าง

ผู้วิจัย : นักเรียนหาคำตอบจากไหน

พรรณ : ดูจากกราฟจะได้ว่า ขีดจำกัดของฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = -1$

เพราะกราฟที่ $x = -1$ ไม่มีเส้นกราฟลากผ่าน ขาดช่วงทำให้หาค่าของขีดจำกัดไม่ได้

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น พรรณสามารถหาค่าฟังก์ชันจากกราฟจะได้ว่า ลิมิตของฟังก์ชัน
ไม่ต่อเนื่องที่ $x = -1$ เพราะกราฟที่ $x = -1.3$ กราฟขาดช่วงทำให้หาค่าของลิมิตไม่ได้ ซึ่งเป็นความ
เข้าใจที่ไม่ถูกต้องเพราะกราฟไม่ต่อเนื่องที่ $x = 3$ เพราะเส้นกราฟขาดช่วงที่ $x = 3$

3.10 ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อเนื่องบนช่วงต่อไปนี้หรือไม่เพราะเหตุใด

- 1.) $[-1, 2]$ ตอบ...ต่อเนื่อง... เพราะ... กราฟติดกัน... X
2.) $[-1, 3]$ ตอบ...ไม่ต่อเนื่อง... เพราะ... กราฟไม่ติดกัน...

ภาพที่ 43 แสดงการหาลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 3 ของพรรณ

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 3 ของพรรณ

จากภาพที่ 43 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาลิมิตและความต่อเนื่องของ
ฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

พรรณ : ดูจากโจทย์ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อเนื่องบนช่วงใดบ้าง

ผู้วิจัย : นักเรียนหาคำตอบจากไหน

พรรณ : ดูจากกราฟจะได้ว่า ลิมิตของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-1, 2]$

และไม่ต่อเนื่องบนช่วง $[-1, 3]$

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น พรรณสามารถหาค่าลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันจาก
กราฟ ลิมิตของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-1, 2]$ และไม่ต่อเนื่องบนช่วง $[-1, 3]$ แต่เหตุผลไม่ถูกต้อง
เพราะดูกราฟไม่เป็น

ข้อ 4. กำหนด $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$; $x \neq 1$ จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=1$ หรือไม่
 $\frac{x}{x+1}$; $x=1$ (แสดงวิธีทำ 5 คะแนน)

~~$f(x) = \frac{x}{x+1}$~~

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2}$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x^2+3)-4}$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2-1}$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(x+1)}$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{x+1}$

$= \frac{\sqrt{1^2+3}+2}{1+1} = \frac{\sqrt{4}+2}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$

ภาพที่ 44 แสดงการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 4 ของพรณ

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 4 ของพรณ

จากภาพที่ 44 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

พรณ : ดูจากโจทย์ฟังก์ชันเพื่อพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อเนื่องที่ $x=1$

ผู้วิจัย : นักเรียนทำอย่างไรต่อ

พรณ : จากบทนิยามฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชัน หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ได้ หา $f(c)$ ได้

และ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ จึงจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=1$

ผู้วิจัย : นักเรียนหาคำตอบจากไหน

พรณ : หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ จากสมการ $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$ แต่หาคำตอบไม่ได้เพราะไม่

เข้าใจการหาสังยุคจึงทำให้ และไม่เข้าใจการหา $f(c)$

ผู้วิจัย : นักเรียนทำอย่างไรต่อ

พรณ : จบการคำนวณ

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น พรรณสามารถหาค่าความต่อเนื่องของฟังก์ชัน จากบทนิยาม ฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชัน หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ได้ หา $f(c)$ ได้ และ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ จึงจะเป็น ฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$ แต่พรรณหาคำตอบไม่ได้ เพราะไม่เข้าใจนิยามความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ข้อ 5. กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 4 ; x \leq -1$
 $x + a ; -1 < x < 3$
 $3x + b ; x \geq 3$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง $[-1, 3]$ จงหาค่าของ $a + b$ (แสดงวิธีทำ y คะแนน)

$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 4 = \lim_{x \rightarrow 1} x + a$
 $= 2(1) + 4$
 $= 2 + 4 = 6$

$\lim_{x \rightarrow 1} x + a = \lim_{x \rightarrow 1} x + a$
 $b = 1 + a$
 $b - 1 = a$
 $a = b$

$\lim_{x \rightarrow 1} 3x + b = 3(1) + b$
 $= 3 + b$
 $-3 = b$

$\therefore a + b = b - 3 = 2$

ภาพที่ 45 แสดงการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 5 ของพรรณ

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 5 ของพรรณ

จากภาพที่ 5 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

พรรณ : หา $f(x)$ ของสมการทั้ง 3 กัน แล้วเอาคำตอบสมการทั้ง 3 มาบวกกันหาคำตอบ $a + b$ ได้

ผู้วิจัย : นักเรียนทำอย่างไรต่อ

พรรณ : จบการหาคำตอบ

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น พรรณไม่สามารถหาค่าความต่อเนื่องของฟังก์ชัน เพราะไม่เข้าใจ

บทนิยามฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชัน หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ไม่ได้ หา $f(c)$ ไม่ได้ และหา

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ จึงทำให้หาคำตอบไม่ถูกต้อง

2.2 กลุ่มอ่อนคนที่ 2 ขล

ตารางที่ 16 ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์จากการทำแบบทดสอบทั้ง 5 ข้อ ของขล

ข้อ	ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์		
	การจัดกระทำ	กระบวนการ	โครงสร้าง
1	จำแนกและเข้าใจสัญลักษณ์ของฟังก์ชัน ในการแทนค่าของฟังก์ชันและนำมาเขียนกราฟได้	หาค่า $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้	-
2	ดูกราฟแล้วหาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$	ไม่สามารถหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน ค่าลิมิตของฟังก์ชันด้านซ้ายและด้านขวาได้	-
3	ดูกราฟแล้วหาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$	ไม่สามารถหาค่าของฟังก์ชัน $f(-1)$ และ $f(3)$ และค่าลิมิตของฟังก์ชันด้านซ้ายและด้านขวา และค่าลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ $x=c$ ได้	ไม่สามารถหาค่าความต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ ได้
4	ไม่สามารถหาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$	ไม่สามารถหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้	- ไม่สามารถใช้นิยามหาค่าความต่อเนื่องฟังก์ชัน บนช่วง $[a,b]$
5	ไม่สามารถหาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$	ไม่สามารถหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้	- ไม่สามารถใช้นิยามหาค่าความต่อเนื่องฟังก์ชัน บนช่วง $[a,b]$

จากตารางที่ 16 พบว่า ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ในการหาคำตอบทั้ง 5 ข้อของขล ข้อที่ 1 มีความเข้าใจ 2 ระดับคือ ระดับการจัดกระทำและระดับกระบวนการ ข้อที่ 2 มีความเข้าใจ 1 ระดับคือ ระดับการจัดกระทำ ส่วนระดับกระบวนการไม่เข้าใจ ข้อที่ 3 มีระดับความเข้าใจ 1 ระดับคือ ระดับการจัดกระทำ ไม่มีความเข้าใจระดับกระบวนการและระดับโครงสร้าง ข้อที่ 4 - ข้อที่ 5 ไม่มี ความเข้าใจ ทั้ง 3 ระดับ

ฟังก์ชัน จากแบบทดสอบข้อที่ 1 กระบวนการสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับความหมายของลิมิตของฟังก์ชัน

ข้อ 1. กำหนด $f(x) = x^2 - x + 4$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ และเขียนกราฟ (แสดงวิธีทำ 5 คะแนน)

x	f(x)
1.0	4
1.5	4.75
1.8	5.44
1.9	5.71
1.95	5.95
1.99	5.97
1.995	5.98
1.999	5.99

x	f(x)
3.0	10
2.5	7.75
2.2	6.64
2.1	6.31
2.05	6.16
2.01	6.03
2.005	6.01
2.001	6.00

ภาพที่ 46 แสดงการหาลิมิตของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 1 ของชล

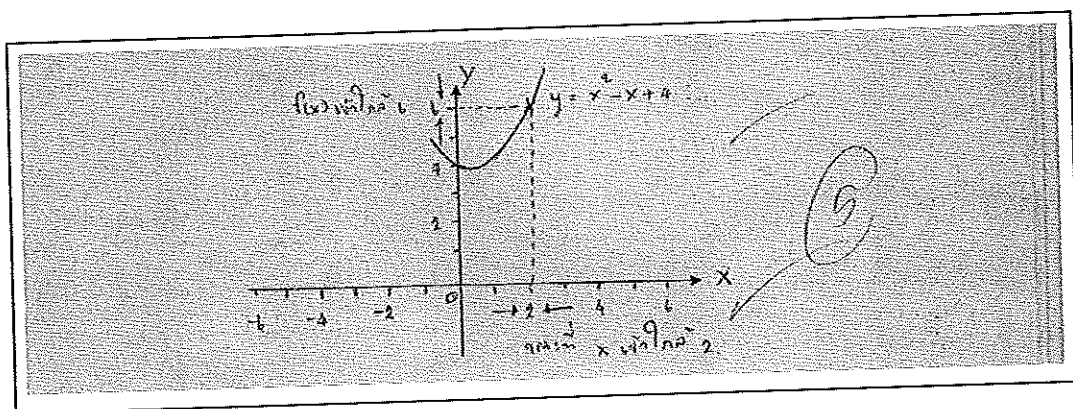
และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 1 ของชล

จากภาพที่ 46 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจในการแปลความหมายของข้อมูลจากตาราง

ผู้วิจัย : ชลมีวิธีการแทนค่า x เพื่อหา $f(x)$ อย่างไร

ชล : นำค่า x ที่ได้ แทนในสมการ $f(x) = x^2 - x + 6$ แล้วนำค่า $f(x)$ ที่ได้เขียนลงในตาราง

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ชลสามารถแสดงวิธีการแทนค่าฟังก์ชันลงในตาราง โดยการแทนค่า x ที่ได้ แทนในสมการ $f(x) = x^2 - x + 6$ แล้วนำค่า $f(x)$ ที่ได้เขียนลงในตาราง



ภาพที่ 47 แสดงการหาลิมิตของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 1 ของชล

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 1 ของชล

จากภาพที่ 47 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : ชลมีวิธีในการนำค่า x และ $f(x)$ จากตารางมาเขียนกราฟของฟังก์ชันได้อย่างไร

ชล : สร้าง แกน x และ แกน y

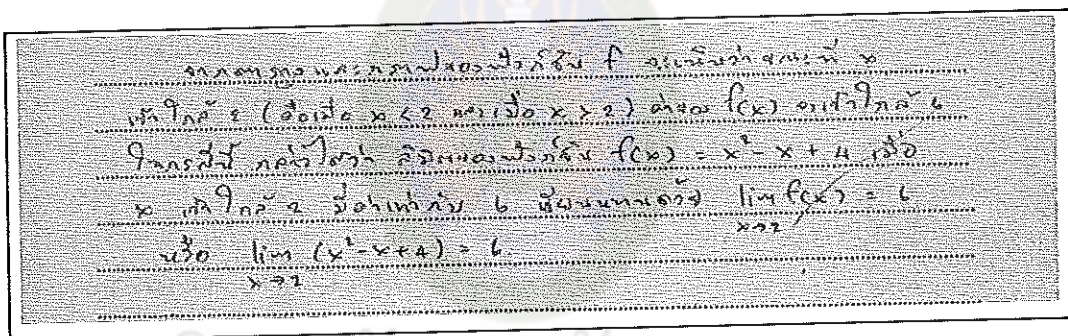
ผู้วิจัย : ชลมีวิธีในการนำค่า x และ $f(x)$ มาเขียนกราฟอย่างไร

ชล : หาค่า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ จากกราฟ

ผู้วิจัย : ชลหาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้อย่างไร

ชล : แทนค่า x และ $f(x)$ ลงในกราฟ แล้วลากเส้นกราฟของฟังก์ชัน

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ชลสามารถแสดงวิธีการแทนค่าฟังก์ชันลงในกราฟของฟังก์ชัน
ได้ถูกต้องครบทุกขั้นตอน



ภาพที่ 48 แสดงการหาลิมิตของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 1 ของชล

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 1 ของชล

จากภาพที่ 48 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการแก้สมการของฟังก์ชัน

ชล : หาค่า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ จากกราฟ

ผู้วิจัย : = ชลหาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้อย่างไร

ชล : จากนิยาม ถ้า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$

ผู้วิจัย : แล้ว $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ มีค่าเท่าไร

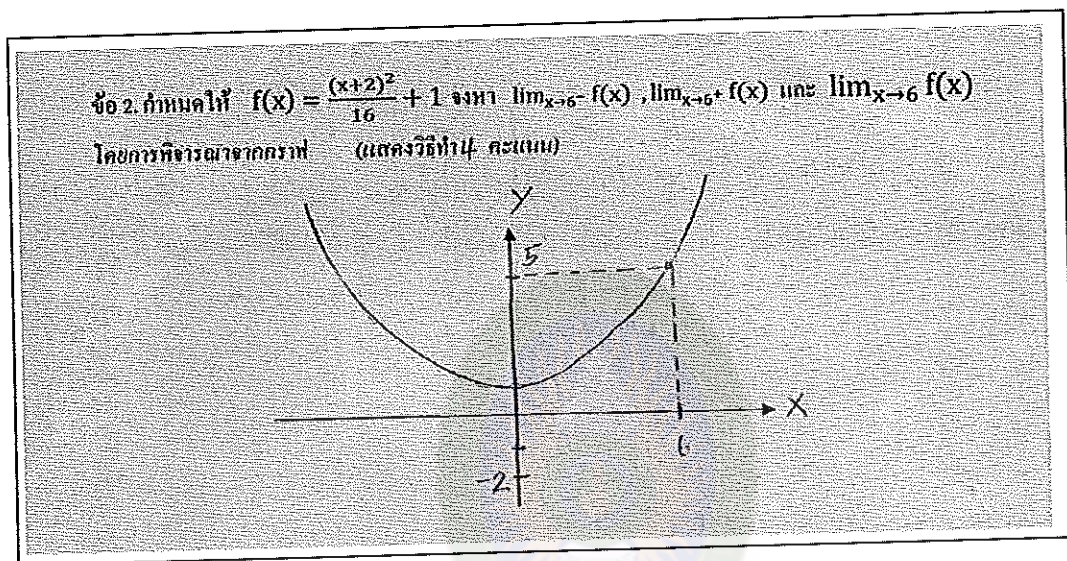
ชล : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 6$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6$

จากผลการสัมพัทธ์ข้างต้น ชลสามารถแสดงวิธีการแทนค่าฟังก์ชันลงในกราฟ แล้วหาค่า

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \text{ จากกราฟและจากนิยามถ้า } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = L \text{ แล้ว}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L \text{ ใต้ถูกต้องครบทุกขั้นตอน}$$

จากแบบทดสอบข้อที่ 2 กระบวนการสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับความหมายลิมิตของฟังก์ชัน



ภาพที่ 49 แสดงการหาลิมิตของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 2 ของชล

และจากการสัมพัทธ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 2 ของชล

จากภาพที่ 49 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการแก้สมการของฟังก์ชัน

ชล : หาค่า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ จากกราฟ

ผู้วิจัย : ชลหาค่า $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$ ได้อย่างไร

ชล : จากนิยาม ถ้า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = L$

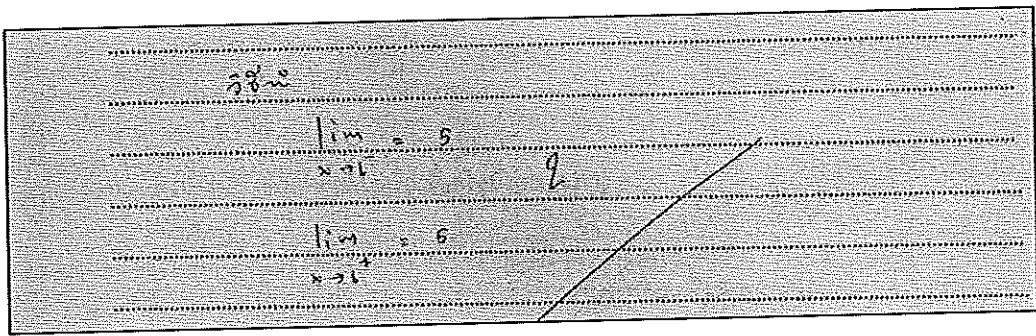
ผู้วิจัย : แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ มีค่าเท่าไร

ชล : $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = 5$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 5$

จากผลการสัมพัทธ์ข้างต้น ชลสามารถหาค่าฟังก์ชันจากกราฟ แล้วหาค่า $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$,

$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ จากกราฟและจากนิยามถ้า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = L$ ได้

ถูกต้องครบทุกขั้นตอน



ภาพที่ 50 แสดงการหาขีดจำกัดของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 2 ของชล

และจากการสังเกตผลการวิเคราะห์ข้อที่ 2 ของชล

จากภาพที่ 50 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการแก้สมการของฟังก์ชัน

ชล : หาค่า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ จากสมการ

ผู้วิจัย : ชลหาค่า $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$ ได้อย่างไร

ชล : จากนิยาม ถ้า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = L$

ผู้วิจัย : แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ มีค่าเท่าไร

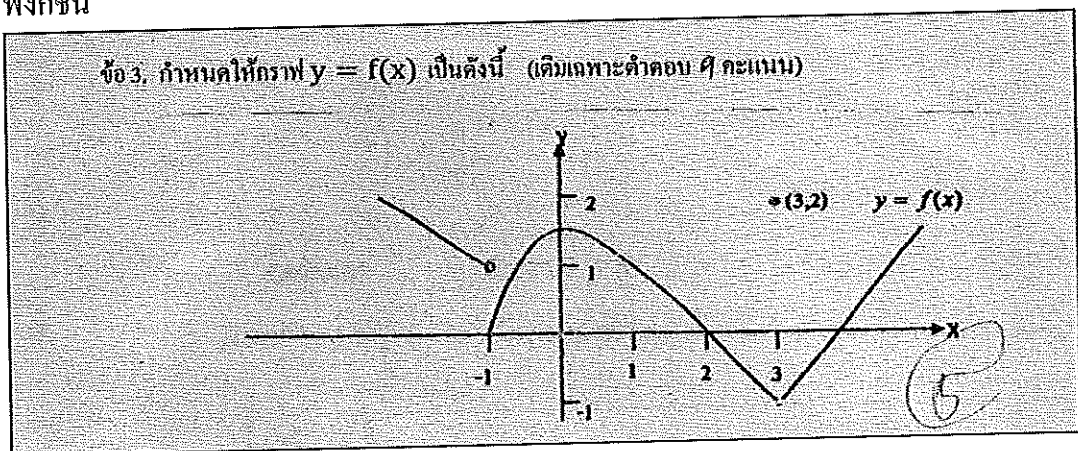
ชล : $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = 5$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 5$

จากผลการทำแบบทดสอบและการสังเกตข้างต้น ชลสามารถหาค่าฟังก์ชันจากสมการ แล้วหาค่า

$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ จากสมการและจากนิยามถ้า $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = L$ แล้ว

$\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = L$ ได้ถูกต้องครบทุกขั้นตอน

จากแบบทดสอบข้อที่ 3 กระบวนการสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน



ภาพที่ 51 แสดงการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 3 ของชล

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 3 ของชล

จากภาพที่ 51 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : ชลมีวิธีในการหาคำตอบจากกราฟได้อย่างไร

ชล : ดูจุดแต่ละจุดที่เส้นกราฟลากผ่าน

จากผลการทำแบบทดสอบและการสัมภาษณ์ข้างต้น ชลสามารถหาคำตอบจากกราฟของ

ฟังก์ชัน

จงหาค่าของ	
3.1) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \dots$	3.2) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \dots$
3.3) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \dots$	3.4) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \dots$
3.5) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \dots$	3.6) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \dots$
3.7) $f(-1) = \dots$	3.8) $f(3) = \dots$

ภาพที่ 52 แสดงการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 3 ของชล

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 3 ของชล

จากภาพที่ 52 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาขีดจำกัดของฟังก์ชัน

ชล : หาค่า $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ จากกราฟ

ผู้วิจัย : ชลหาค่า $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ได้อย่างไร

ชล : หาได้จากกราฟถ้า $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = L_1$

ผู้วิจัย : แล้วทำอย่างไรต่อ

ชล : หาค่า $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = L_1$

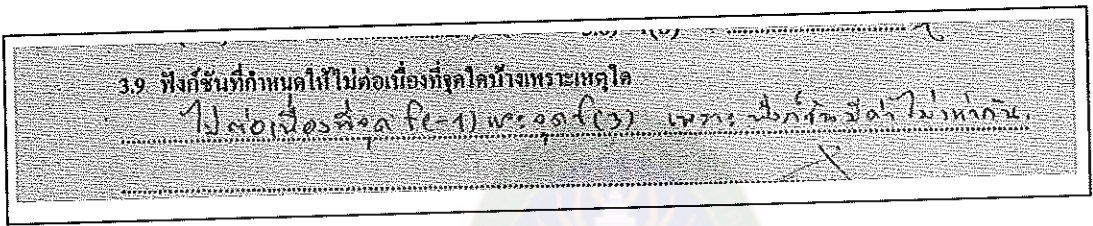
ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

ชล : ดูจากกราฟแล้วหาคำตอบ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

ผู้วิจัย : แล้วทำอย่างไรต่อ

ชล : หาคำตอบของ $f(-1)$ และ $f(3)$ จากกราฟ

จากผลการสัมพัทธ์ข้างต้น ชลสามารถหาค่าฟังก์ชันจากกราฟ แล้วหาค่า $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ จากสมการและจากนิยามถ้า $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = L_1$ ซึ่งเป็นความเข้าใจที่ผิด และหาค่า $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ จากสมการและจากนิยามถ้า $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = L_1$ ซึ่งเป็นความเข้าใจที่ผิด จึงทำให้หาคำตอบของสมการไม่ถูกต้อง เพราะที่ถูกต้องนิยามถ้า $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = L$ และหาค่า $f(-1)$ และ $f(3)$ ก็ไม่ถูกต้องเพราะดูกราฟไม่ถูกต้อง



ภาพที่ 53 แสดงการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 3 ของชล

และจากการสัมพัทธ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 3 ของชล

จากภาพที่ 53 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

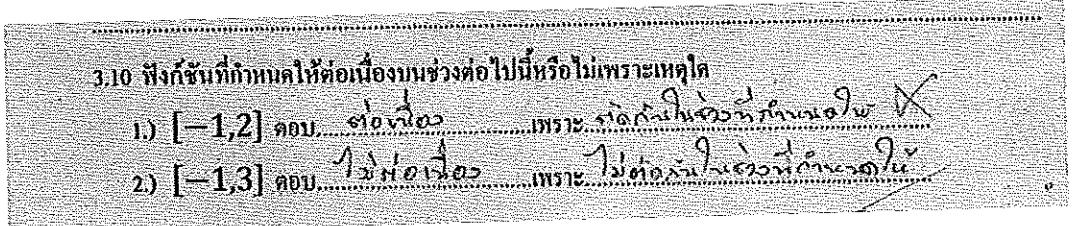
ชล : ดูจากโจทย์ฟังก์ชันที่กำหนดให้ไม่ต่อเนื่องที่จุดใดบ้าง

ผู้วิจัย : นักเรียนหาคำตอบจากไหน

ชล : ดูจากกราฟจะได้ว่า ขีดจำกัดของฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = -1$

เพราะกราฟที่ $x = -1$ ไม่มีเส้นกราฟลากผ่าน ขาดช่วงทำให้หาค่าของขีดจำกัดไม่ได้

จากผลการสัมพัทธ์ข้างต้น ชลสามารถหาค่าฟังก์ชันจากกราฟจะได้ว่า ขีดจำกัดของฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = -1$ เพราะกราฟที่ $x = -1$ กราฟขาดช่วงทำให้หาค่าของขีดจำกัดไม่ได้ ซึ่งเป็นความเข้าใจที่ไม่ถูกต้องเพราะกราฟไม่ต่อเนื่องที่ $x = 3$ เพราะเส้นกราฟขาดช่วงที่ $x = 3$



ภาพที่ 54 แสดงการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 3 ของชล

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 3 ของชล

จากภาพที่ 54 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

ชล : ดูจากโจทย์ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อเนื่องบนช่วงใดบ้าง

ผู้วิจัย : นักเรียนหาคำตอบจากไหน

ชล : ดูจากกราฟจะได้ว่า ขีดจำกัดของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-1,2]$ และไม่ต่อเนื่องบนช่วง $[-1,3]$

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ชลสามารถหาค่าขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชันจากกราฟขีดจำกัดของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-1,2]$ และไม่ต่อเนื่องบนช่วง $[-1,3]$ แต่ให้เหตุผลไม่ถูกต้องเพราะดูกราฟไม่เป็น

จากแบบทดสอบข้อที่ 4 กระบวนการสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ข้อ 4. กำหนด $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$; $x \neq 1$ จงพิจารณาว่าฟังก์ชันนี้ต่อเนื่องที่ $x = 1$ หรือไม่
 $\frac{x}{x+1}$; $x = 1$ (แสดงวิธีทำ 5 คะแนน)

$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$; $x \neq 1$ $\frac{x}{x+1}$; $x = 1$	$= \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2+3-1}$ $= \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2+2}$ $= \frac{\sqrt{1^2+3}-2}{1^2+2}$ $= \frac{\sqrt{4}-2}{2}$ $= \frac{2-2}{2}$ $= 0$ \therefore ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$
---	--

ภาพที่ 55 แสดงการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 4 ของชล

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 4 ของชด

จากภาพที่ 55 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

ชด : ดูจากโจทย์ฟังก์ชันเพื่อพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อเนื่องที่ $x = 1$

ผู้วิจัย : นักเรียนทำอย่างไรต่อ

ชด : จากบทนิยามฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชัน หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ได้ หา $f(c)$ ได้

และ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ จึงจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$

ผู้วิจัย : นักเรียนหาคำตอบจากไหน

ชด : หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ จากสมการ $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$ แต่หาคำตอบไม่ได้เพราะไม่เข้าใจ

การหาสังยุคจึงทำให้ และไม่เข้าใจการหา $f(c)$

ผู้วิจัย : นักเรียนทำอย่างไรต่อ

ชด : จบการคำนวณ

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ชดสามารถหาคำตอบต่อเนื่องของฟังก์ชัน จากบทนิยามฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชัน หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ได้ หา $f(c)$ ได้ และ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ จึงจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$ แต่ชดหาคำตอบไม่ได้ เพราะไม่เข้าใจนิยามความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

จากแบบทดสอบข้อที่ 5 กระบวนการสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ข้อ 5. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4; & x \leq -1 \\ x + a; & -1 < x < 3 \\ 3x + b; & x \geq 3 \end{cases}$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-1, 3]$ จงหาค่าของ $a + b$ (แสดงวิธีทำ ๗ คะแนน)

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x + a)$

$x = 3 \quad x + a = (-1) + 4$

$a = 3 + 1 = 4$

$f(x) = \begin{cases} x > 3; & 3a + b = 3x + b \\ & 3 + b = 3(3) = 9 \\ & b = 6 \end{cases}$

$\therefore a + b = 4 + 3 = 7$

ภาพที่ 56 แสดงการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 5 ของชด

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 4 ของชด

จากภาพที่ 56 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

ชด : หา $f(x)$ ของสมการทั้ง 3 กัน แล้วเอาคำตอบสมการทั้ง 3 มาบวกกันหาคำตอบ $a+b$

ได้

ผู้วิจัย : นักเรียนทำอย่างไรต่อ

ชด : จบการหาคำตอบ

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ชดไม่สามารถหาคำความต่อเนื่องของฟังก์ชัน เพราะไม่เข้าบทนิยามฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชัน หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ไม่ได้ หา $f(c)$ ไม่ได้ และหา $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

จึงทำให้หาคำตอบ ไม่ถูกต้อง

2.3 กลุ่มอ่อนคนที่ 3 กัทร

ตารางที่ 17 ผลการวิเคราะห์จากการทำแบบทดสอบทั้ง 5 ข้อ ของกัทร

ข้อ	ระดับความเข้าใจ		
	การจัดกระทำ	กระบวนการ	โครงสร้าง
1	จำแนกและเข้าใจสัญลักษณ์ของฟังก์ชัน ในการแทนค่าของฟังก์ชันและนำมาเขียนกราฟได้	หาค่า $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้	-
2	ดูกราฟแล้วหาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$	ไม่สามารถหาค่าขีดจำกัดของฟังก์ชัน ค่าขีดจำกัดของฟังก์ชันด้านซ้ายและด้านขวาได้	-
3	ดูกราฟแล้วหาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$	ไม่สามารถหาค่าของฟังก์ชัน $f(-1)$ และ $f(3)$ และค่าขีดจำกัดของฟังก์ชันด้านซ้ายและด้านขวา และค่าขีดจำกัดของฟังก์ชัน เมื่อ $x=c$ ได้	ไม่สามารถหาค่าความต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ ได้

ข้อ	ระดับความเข้าใจ		
	การจัดกระทำ	กระบวนการ	โครงสร้าง
4	ไม่สามารถหาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$	ไม่สามารถหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้	- ไม่สามารถใช้นิยามหาค่าความต่อเนื่องฟังก์ชัน บนช่วง $[a,b]$
5	ไม่สามารถหาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$	ไม่สามารถหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้	- ไม่สามารถใช้นิยามหาค่าความต่อเนื่องฟังก์ชัน บนช่วง $[a,b]$

จากตารางที่ 17 พบว่า การวิเคราะห์ระดับความเข้าใจในการหาคำตอบทั้ง 5 ข้อของภัทร มีระดับความเข้าใจ ข้อที่ 1 มีความเข้าใจ 2 ระดับคือ ระดับการจัดกระทำและระดับกระบวนการ ข้อที่ 2 มีความเข้าใจ 1 ระดับคือ ระดับการจัดกระทำ ส่วนระดับกระบวนการไม่เข้าใจ ข้อที่ 3 มีระดับความเข้าใจ 1 ระดับ คือ ระดับการจัดกระทำ ส่วนระดับกระบวนการและระดับโครงสร้างไม่มีความเข้าใจ ข้อที่ 4- ข้อที่ 5 ไม่มีความเข้าใจทั้ง 3 ระดับ

จากแบบทดสอบข้อที่ 1 กระบวนการสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับความหมายของลิมิตของฟังก์ชัน

ข้อ 1. กำหนด $f(x) = x^2 - x + 4$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ และเขียนกราฟ (แสดงวิธีทำ 5 คะแนน)

x	f(x)
1.0	4
1.5	4.75
1.8	5.44
1.9	5.81
1.95	5.89
1.99	5.97
1.995	5.98
1.999	5.99

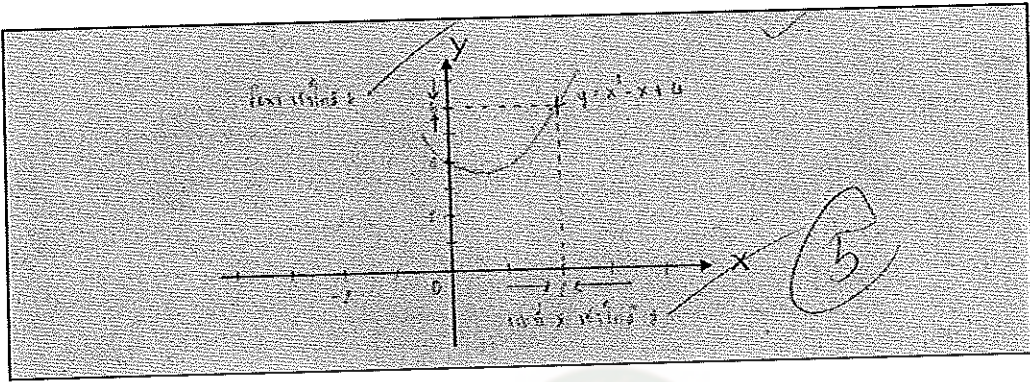
x	f(x)
3.0	10.0
2.5	9.75
2.2	8.64
2.1	8.51
2.05	8.15
2.01	8.03
2.005	8.01
2.001	8

ภาพที่ 57 แสดงการหาลิมิตของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 1 ของภัทร

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 1 ของชล

จากภาพที่ 57 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจในการแปลความหมายของข้อมูลจากตาราง
ผู้วิจัย : ภัทรมีวิธีในการแทนค่า x เพื่อหา $f(x)$ อย่างไร

ภัทร : นำค่า x ที่ได้ แทนในสมการ $f(x) = x^2 - x + 6$ แล้วนำค่า $f(x)$ ที่ได้เขียนลงในตาราง
 จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ภัทรสามารถแสดงวิธีการแทนค่าฟังก์ชันลงในตาราง โดยการ
 แทนค่า x ที่ได้ แทนในสมการ $f(x) = x^2 - x + 6$ แล้วนำค่า $f(x)$ ที่ได้เขียนลงในตาราง



ภาพที่ 58 แสดงการหาขีดจำกัดของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 1 ของภัทร

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 1 ของชล

จากภาพที่ 58 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : ภัทรมีวิธีในการนำค่า x และ $f(x)$ จากตารางมาเขียนกราฟของฟังก์ชันได้อย่างไร

ภัทร : สร้าง แกน x และ แกน y

ผู้วิจัย : ภัทรมีวิธีในการนำค่า x และ $f(x)$ มาเขียนกราฟอย่างไร

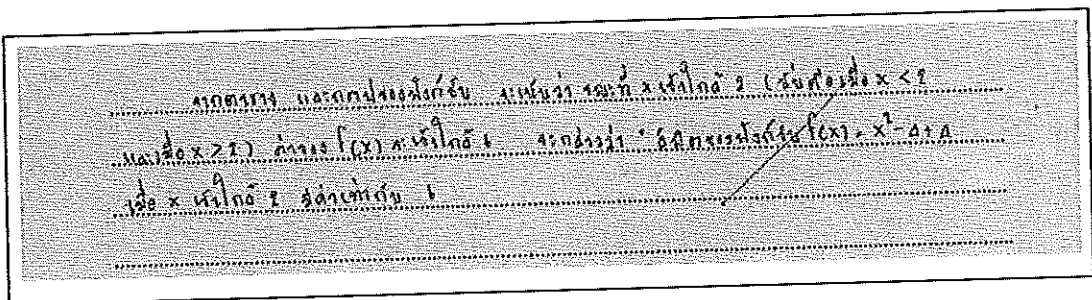
ภัทร : หาค่า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ จากกราฟ

ผู้วิจัย : ภัทรหาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้อย่างไร

ภัทร : แทนค่า x และ $f(x)$ ลงในกราฟ แล้วลากเส้นกราฟของฟังก์ชัน

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ภัทรสามารถแสดงวิธีการแทนค่าฟังก์ชันลงในกราฟของฟังก์ชัน

ได้ถูกต้องครบทุกขั้นตอน



ภาพที่ 59 แสดงการหาขีดจำกัดของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 1 ของภัทร

และจากการสัมพัทธ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 1 ของชด

จากภาพที่ 59 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาค่าฟังก์ชัน

ภัทร : หาค่า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ จากกราฟ

ผู้วิจัย : ชลหาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ได้อย่างไร

ภัทร : จากนิยาม ถ้า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$

ผู้วิจัย : แล้ว $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ มีค่าเท่าไร

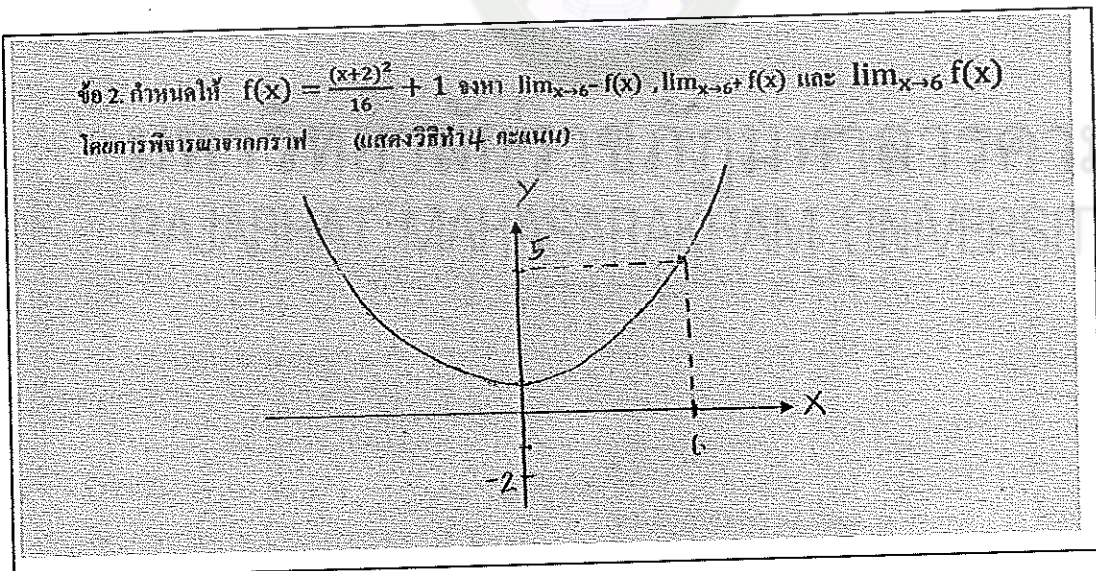
ภัทร : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 6$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6$

จากผลการสัมพัทธ์ข้างต้น ภัทรสามารถแสดงวิธีการแทนค่าฟังก์ชันลงในกราฟ แล้วหาค่า

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ จากกราฟและจากนิยามถ้า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = L$ แล้ว

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$ ได้ถูกต้องครบทุกขั้นตอน

จากแบบทดสอบข้อที่ 2 กระบวนการสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับความหมายของลิมิตของฟังก์ชัน



ภาพที่ 60 แสดงการหาลิมิตของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 2 ของภัทร

และจากการสัมพัทธ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 2 ของภัทร

จากภาพที่ 60 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการแก้สมการของฟังก์ชัน

ภัทร : หาค่า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ จากกราฟ

ผู้วิจัย : ภัทรหาค่า $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$ ได้อย่างไร

ภัทร : จากนิยาม ถ้า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = L$

ผู้วิจัย : แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ มีค่าเท่าไร

ภัทร : $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = 5$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 5$

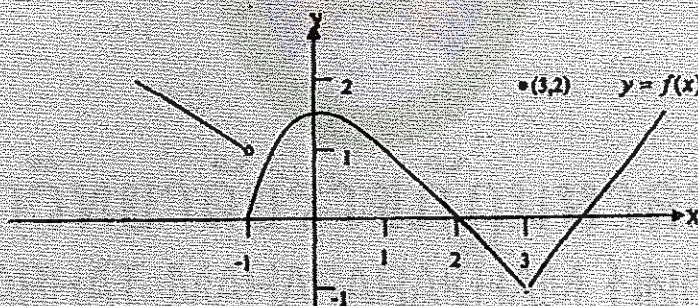
จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ภัทรสามารถหาค่าฟังก์ชันจากกราฟแล้วหาค่า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$,

$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ จากกราฟและจากนิยามถ้า $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = L$ ได้

ถูกต้องครบทุกขั้นตอน

จากแบบทดสอบข้อที่ 3 กระบวนการสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ข้อ 3. กำหนดให้กราฟ $y = f(x)$ เป็นดังนี้ (เดิมเฉพาะค่าขอบ ๕ คะแนน)



ภาพที่ 61 แสดงการหาลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 3 ของภัทร

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 3 ของภัทร

จากภาพที่ 61 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : ภัทรมีวิธีในการหาคำตอบจากกราฟได้อย่างไร

ภัทร : ดูจุดแต่ละจุดที่เส้นกราฟลากผ่าน

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น กัทรสามารถหาคำตอบจากกราฟของฟังก์ชัน

จงหาค่าของ	
3.1) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) =$	3.2) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$
3.3) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$	3.4) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$
3.5) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$	3.6) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$
3.7) $f(-1) =$	3.8) $f(3) =$

ภาพที่ 62 แสดงการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 3 ของกัทร

และจากการสัมภาษณ์ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 3 ของกัทร

จากภาพที่ 62 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาขีดจำกัดของฟังก์ชัน

กัทร : หาค่า $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ จากกราฟ

ผู้วิจัย : ชลหาค่า $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ได้อย่างไร

กัทร : หาได้จากกราฟ ถ้า $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = L_1$

ผู้วิจัย : แล้วทำอย่างไรต่อ

กัทร : หาค่า $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = L_1$

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

กัทร : ดูจากกราฟแล้วหาคำตอบ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

ผู้วิจัย : แล้วทำอย่างไรต่อ

กัทร : หาคำตอบของ $f(-1)$ และ $f(3)$ จากกราฟ

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น กัทรสามารถหาค่าฟังก์ชันจากกราฟแล้วหาค่า $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$,

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ จากสมการและจากนิยามถ้า $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = L_1$ ซึ่ง

เป็นความเข้าใจที่ผิด และหาค่า $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ จากสมการและจากนิยามถ้า $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = L_1$ ซึ่งเป็นความเข้าใจที่ผิด จึงทำให้หาคำตอบของสมการไม่

ถูกต้อง เพราะที่ถูกต้องนิยามถ้า $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = L$ และหาค่า $f(-$

1) และ $f(3)$ ก็ไม่ถูกต้องเพราะดูกราฟไม่ถูกต้อง

3.9 ฟังก์ชันที่กำหนดให้ไม่ต่อเนื่องที่จุดใดบ้างเพราะเหตุใด
 $[-1, 3]$ เพราะ กราฟไม่ติดกัน

ภาพที่ 63 แสดงการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 3 ของภัทร

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 3 ของภัทร

จากภาพที่ 63 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

ภัทร : ดูจากโจทย์ฟังก์ชันที่กำหนดให้ไม่ต่อเนื่องที่จุดใดบ้าง

ผู้วิจัย : นักเรียนหาคำตอบจากไหน

ภัทร : ดูจากกราฟจะได้ว่า ขีดจำกัดของฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = -1$

เพราะกราฟที่ $x = -1$ ไม่มีเส้นกราฟลากผ่าน ขาดช่วงทำให้หาค่าของขีดจำกัดไม่ได้

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ภัทรสามารถหาค่าฟังก์ชันจากกราฟจะได้ว่า ขีดจำกัดของฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = -1$ เพราะกราฟที่ $x = -1$ กราฟขาดช่วงทำให้หาค่าของขีดจำกัดไม่ได้ ซึ่งเป็นความเข้าใจที่ไม่ถูกต้องเพราะกราฟไม่ต่อเนื่องที่ $x = 3$ เพราะเส้นกราฟขาดช่วงที่ $x = 3$

3.10 ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อเนื่องบนช่วงต่อไปนี้หรือไม่เพราะเหตุใด

- 1) $[-1, 2]$ ตอบ...ต่อเนื่อง... เพราะ... กราฟไม่ติดกัน
- 2) $[-1, 3]$ ตอบ...ไม่ต่อเนื่อง... เพราะ... กราฟไม่ติดกัน

ภาพที่ 64 แสดงการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 3 ของภัทร

จากแผนภาพ ผู้วิจัย ได้ตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาขีดจำกัดและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

ภัทร : ดูจากโจทย์ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อเนื่องบนช่วงใดบ้าง

ผู้วิจัย : นักเรียนหาคำตอบจากไหน

ภัทร : ดูจากกราฟจะได้ว่า ขีดจำกัดของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-1, 2]$

และไม่ต่อเนื่องบนช่วง $[-1, 3]$

จากผลการสัมพัทธ์ข้างต้น ภัทรสามารถหาค่าลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันจากกราฟ
ลิมิตของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-1,2]$ และ ไม่ต่อเนื่องบนช่วง $[-1,3]$ แต่เพราะให้เหตุผลไม่ถูกต้อง
เพราะดูกราฟไม่เป็น

จากแบบทดสอบข้อที่ 4 กระบวนการสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับลิมิตและความต่อเนื่องของ
ฟังก์ชัน

ข้อ 4. กำหนด $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$; $x \neq 1$ จงพิจารณาว่าฟังก์ชันนี้ต่อเนื่องที่ $x = 1$ หรือไม่
(แสดงวิธีทำ 5 คะแนน)

วิธีทำ

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$$

$$= \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2}$$

$$= \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2+3-4}$$

$$= \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2-1}$$

$$= \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{x+1}$$

$$= \frac{\sqrt{1^2+3}+2}{1+1}$$

$$= \frac{\sqrt{4}+2}{2}$$

$$= \frac{2+2}{2}$$

$$= \frac{4}{2}$$

$$= 2$$

ดังนั้น ฟังก์ชันนี้ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$

ภาพที่ 65 แสดงการหาลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 4 ของภัทร

และจากการสัมพัทธ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 4 ของภัทร

จากภาพที่ 65 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาลิมิตและความต่อเนื่องของ
ฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

ภัทร : ดูจากโจทย์ฟังก์ชันเพื่อพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อเนื่องที่ $x = 1$

ผู้วิจัย : นักเรียนทำอย่างไรต่อ

ภัทร : จากบทนิยามฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชัน หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ได้ หา $f(c)$ ได้

และ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ จึงจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$

ผู้วิจัย : นักเรียนหาคำตอบจากไหน

ภัทร : หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ จากสมการ $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$ แต่หาคำตอบไม่ได้เพราะไม่เข้าใจ

การหาสังยุคจึงทำให้ และ ไม่เข้าใจการหา $f(c)$

ผู้วิจัย : นักเรียนทำอะไรต่อ

ภัทร : จบการคำนวณ

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ภัทรสามารถหาค่าความต่อเนื่องของฟังก์ชัน จากบทนิยาม ฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชัน หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ได้ หา $f(c)$ ได้ และ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ จึงจะเป็น ฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$ แต่ภัทรหาคำตอบไม่ได้ เพราะไม่เข้าใจนิยามความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

จากแบบทดสอบข้อที่ 5 กระบวนการสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับลิมิตและความต่อเนื่องของ ฟังก์ชัน

ข้อ 5. กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 4 ; x \leq -1$
 $x + a ; -1 < x < 3$
 $3x + b ; x \geq 3$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง $[-1, 3]$ จงหาค่าของ $a + b$ (แสดงวิธีทำ 7 คะแนน)

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 4 = (-1)^2 + 4 = 5$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x + a = -1 + a$

$5 = -1 + a$

$a = 6$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} 3x + b = 9 + b$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} x + a = 3 + 6 = 9$

$9 + b = 9$

$b = 0$

$a + b = 6 + 0 = 6$

ภาพที่ 66 แสดงการหาลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ข้อสอบข้อที่ 5 ของภัทร

และจากการสัมภาษณ์ ผลการวิเคราะห์ข้อที่ 5 ของภัทร

จากภาพที่ 66 ผู้วิจัยตั้งคำถามเพื่อวัดความเข้าใจเกี่ยวกับการหาลิมิตและความต่อเนื่องของ

ฟังก์ชัน

ผู้วิจัย : นักเรียนมีวิธีหาคำตอบอย่างไร

ภัทร : หา $f(x)$ ของสมการทั้ง 3 กัน แล้วเอาคำตอบสมการทั้ง 3 มาบวกกันหาคำตอบ $a+b$ ได้

ผู้วิจัย : นักเรียนทำอย่างไรต่อ

ภัทร : จบการหาคำตอบ

จากผลการสัมภาษณ์ข้างต้น ภัทรไม่สามารถหาคำความต่อเนื่องของฟังก์ชัน เพราะไม่เข้าบทนิยามฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชัน หา $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ไม่ได้ หา $f(c)$ ไม่ได้ และหา $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

จึงทำให้หาคำตอบไม่ถูกต้อง

ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ของนักเรียนกลุ่มเก่งและกลุ่มอ่อน กรณีศึกษา

ข้อสอบข้อที่ 1-2 กำหนดระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ 2 ระดับ คือ ระดับการจัดกระทำและระดับกระบวนการ ข้อสอบข้อที่ 3-5 กำหนดระดับความเข้าใจ 3 ระดับ คือ ระดับการจัดกระทำและระดับกระบวนการและระดับโครงสร้าง ปραกฏผลดังตารางที่ 18

ตารางที่ 18 ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ของนักเรียนกลุ่มเก่ง และกลุ่มอ่อน กรณีศึกษา

ข้อที่	กลุ่มเก่ง			กลุ่มอ่อน		
	ระดับความเข้าใจ			ระดับความเข้าใจ		
	การจัดกระทำ(คน)	กระบวนการ(คน)	โครงสร้าง(คน)	การจัดกระทำ(คน)	กระบวนการ(คน)	โครงสร้าง(คน)
1	3	3	-	3	3	-
2	3	2	-	3	1	-
3	3	1	1	3	0	0
4	3	2	2	0	0	0
5	3	1	1	0	0	0

จากตารางที่ 18 พบว่า ข้อที่ 1 นักเรียนกลุ่มเก่งและกลุ่มอ่อน มีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ระดับการจัดกระทำและระดับกระบวนการ ครบทั้ง 6 คน ข้อที่ 2 นักเรียนกลุ่มเก่ง มีความเข้าใจระดับการจัดกระทำ จำนวน 3 คนและระดับกระบวนการ จำนวน 2 คน นักเรียนกลุ่มอ่อน มีความเข้าใจระดับการจัดกระทำ จำนวน 3 คนและระดับกระบวนการ จำนวน 1 คน ข้อที่ 3 นักเรียนกลุ่มเก่ง มี

ความเข้าใจระดับการจัดกระทำ จำนวน 3 คน ระดับกระบวนการและระดับ โครงสร้าง จำนวน 1 คน
 นักเรียนกลุ่มอ่อน มีความเข้าใจระดับการจัดกระทำ จำนวน 3 คน ไม่มีความเข้าใจระดับกระบวนการ
 และไม่มีความเข้าใจระดับ โครงสร้าง ข้อที่ 4 นักเรียนกลุ่มเก่ง มีความเข้าใจระดับการจัดกระทำ
 จำนวน 3 คน ระดับกระบวนการและระดับ โครงสร้าง จำนวน 2 คน นักเรียนกลุ่มอ่อนไม่มีความเข้าใจ
 ทั้ง 3 ระดับ และข้อที่ 5 นักเรียนกลุ่มเก่ง มีความเข้าใจระดับการจัดกระทำ จำนวน 3 คน ระดับ
 กระบวนการและระดับ โครงสร้าง จำนวน 1 คน นักเรียนกลุ่มอ่อนไม่มีความเข้าใจทั้ง 3 ระดับ

จากการสัมภาษณ์ นักเรียนทั้งกลุ่มเก่งและกลุ่มอ่อน มีความเข้าใจระดับการจัดกระทำ
 สามารถหาคำตอบของลิมิตของฟังก์ชันเมื่อกำหนด x มาให้นักเรียนจะใช้วิธีการหาคำตอบของลิมิต
 ของฟังก์ชันจากการเขียนตาราง การเขียนกราฟ หาค่าลิมิตซ้ายของ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L_1 เมื่อ x
 เข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ และลิมิตขวาของ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L_2 เมื่อ x เข้าใกล้ a ทาง
 ด้านขวา $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$ และ $L_1 = L_2$ จึงจะหาค่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ได้ ส่วนความเข้าใจระดับกระบวนการ
 นักเรียน กลุ่มเก่งสามารถหาค่าลิมิตของฟังก์ชันบนช่วงที่กำหนดให้ได้ หาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่ง
 นิยามบนช่วง $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกๆจุดในช่วง (a,b) และ
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ แต่กลุ่มอ่อนไม่สามารถหาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งนิยามบน
 ช่วง $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกๆจุดในช่วง (a,b) และ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$,
 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ ได้ เนื่องจากไม่เข้าใจลำดับขั้นตอนวิธีการหาคำตอบว่าแต่ละขั้นตอนมีวิธีการหา
 คำตอบอย่างไร จึงทำให้หาคำตอบลิมิตบนช่วงไม่ได้ และความเข้าใจระดับ โครงสร้าง นักเรียนกลุ่ม
 เก่งสามารถหาคำตอบของความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ที่ $x=c$ ก็ต่อเมื่อ 1. $f(c)$ หาค่าได้ 2.
 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ หาค่าได้ และ 3. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ ได้ แต่นักเรียนกลุ่มอ่อนไม่สามารถหาคำตอบลิมิต
 และความต่อเนื่องของฟังก์ชันเนื่องจากไม่เข้าใจนิยามลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันจึงทำให้ไม่
 สามารถหาค่าลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันได้

ผลการศึกษความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี Action-Process-Structure (APS) เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 สรุปผลการวิจัย ได้ดังนี้

สรุปผลการทดสอบการวัดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์

นักเรียนกลุ่มเป้าหมาย

ข้อที่ 1 มีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ระดับการจัดกระทำร้อยละ 88 และระดับ

กระบวนการร้อยละ 85 ข้อที่ 2 มีความเข้าใจระดับการจัดกระทำร้อยละ 85 และระดับกระบวนการ

ร้อยละ 67 ข้อที่ 3 มีความเข้าใจระดับการจัดกระทำร้อยละ 84 ระดับกระบวนการร้อยละ 66 และระดับโครงสร้างร้อยละ 23 ข้อที่ 4 มีความเข้าใจระดับการจัดกระทำร้อยละ 86 ระดับกระบวนการร้อยละ 65 และระดับโครงสร้างร้อยละ 27 และข้อที่ 5 มีความเข้าใจระดับการจัดกระทำร้อยละ 80 ระดับกระบวนการร้อยละ 68 และระดับโครงสร้างร้อยละ 20

นักเรียนกลุ่มกรณีศึกษา

ข้อที่ 1 นักเรียนกลุ่มเก่งและกลุ่มอ่อน มีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ระดับการจัดกระทำและระดับกระบวนการ ครบทั้ง 6 คน ข้อที่ 2 นักเรียนกลุ่มเก่ง มีความเข้าใจระดับการจัดกระทำจำนวน 3 คนและระดับกระบวนการ จำนวน 2 คน นักเรียนกลุ่มอ่อน มีความเข้าใจระดับการจัดกระทำ จำนวน 3 คนและระดับกระบวนการ จำนวน 1 คน ข้อที่ 3 นักเรียนกลุ่มเก่ง มีความเข้าใจระดับการจัดกระทำ จำนวน 3 คน ระดับกระบวนการและระดับโครงสร้าง จำนวน 1 คน นักเรียนกลุ่มอ่อน มีความเข้าใจระดับการจัดกระทำ จำนวน 3 คน ระดับกระบวนการและไม่มีมีความเข้าใจระดับโครงสร้าง ข้อที่ 4 นักเรียนกลุ่มเก่ง มีความเข้าใจระดับการจัดกระทำ จำนวน 3 คน ระดับกระบวนการและระดับโครงสร้าง จำนวน 2 คน นักเรียนกลุ่มอ่อน ไม่มีมีความเข้าใจทั้ง 3 ระดับ และข้อที่ 5 นักเรียนกลุ่มเก่ง มีความเข้าใจระดับการจัดกระทำ จำนวน 3 คน ระดับกระบวนการและระดับโครงสร้าง จำนวน 1 คน นักเรียนกลุ่มอ่อน ไม่มีมีความเข้าใจทั้ง 3 ระดับ

สรุปผลการสัมภาษณ์

นักเรียนกลุ่มเก่งมีความเข้าใจในระดับการจัดกระทำครบทุกคน เพราะนักเรียนเข้าใจนิยาม กฎ ทฤษฎีเกี่ยวกับลิมิตจึงนำมาใช้ในการหาคำตอบได้ ความเข้าใจระดับกระบวนการครบทุกคนเพราะนักเรียนเข้าใจนิยาม ทฤษฎีวิธีการหาคำตอบลิมิตของฟังก์ชันบนช่วง และความเข้าใจระดับโครงสร้างมีความเข้าใจบางคน แต่บางคนก็หาคำตอบความต่อเนื่องของฟังก์ชันไม่ได้ เพราะไม่เข้าใจนิยาม ทฤษฎีและลำดับขั้นตอนวิธีการหาคำตอบว่าแต่ละขั้นตอนมีวิธีการหาคำตอบอย่างไรจึงทำให้หาคำตอบความต่อเนื่องของฟังก์ชันไม่ได้ นักเรียนกลุ่มอ่อนมีความเข้าใจในระดับการจัดกระทำครบทุกคน เพราะนักเรียนเข้าใจนิยาม กฎ ทฤษฎีเกี่ยวกับลิมิตจึงนำมาใช้ในการหาคำตอบได้ ไม่มีมีความเข้าใจระดับกระบวนการและระดับโครงสร้างเพราะนักเรียนไม่เข้าใจนิยาม กฎ ทฤษฎี วิธีการหาคำตอบและลำดับขั้นตอนวิธีการหาคำตอบว่าแต่ละขั้นตอนมีวิธีการหาคำตอบอย่างไรจึงทำให้หาคำตอบความต่อเนื่องของฟังก์ชันไม่ได้