บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยเรื่อง การวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ จากแบบฝึกหัดเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนยางตลาดวิทยาคาร จังหวัดกาฬสินธุ์ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง เพื่อเป็นกรอบและแนวทางในการวิจัยในด้านต่างๆ โดยขอนำเสนอตามลำดับ ดังต่อไปนี้

1. หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 4
2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
3. การวินิจฉัยทางการเรียน
    3.1 ความหมายของการวินิจฉัยทางการเรียน
    3.2 วิธีการวินิจฉัยทางการเรียน
    3.3 รูปแบบของการวินิจฉัยทางการเรียน
    3.4 แนวทางการวินิจฉัยทางการเรียน
    3.5 เทคนิคในการวินิจฉัยทางการเรียน
    3.6 ระดับการวินิจฉัย
4. ข้อบกพร่องทางการเรียน
    4.1 ความหมายของข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์
    4.2 ความสำคัญของข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์
    4.3 ลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์
5. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
    5.1 งานวิจัยในประเทศ
    5.2 งานวิจัยในต่างประเทศ

หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 4

ในการสอนนั้นครูผู้สอนจำเป็นต้องยึดแนวและดำเนินการสอนตามหลักสูตรที่ได้กำหนดไว้ หลักสูตรจึงเปรียบเสมือนแม่บทที่ครูจะต้องทำความเข้าใจหลักสูตรให้ลึกซึ้ง รวมทั้งถ่ายทอด

กระบวนการสอนเพื่อให้การเรียนรู้ของเด็กเป็นมาตรฐานเหมือนกันทั่วไป ไม่ว่าจะเรียนอยู่ที่ใด และภาคการศึกษาใดก็ตาม จากหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2544 นี้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เปิดโอกาสให้เยาวชนทุกคนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่องตามศักยภาพ โดยกำหนดสาระหลักที่จำเป็นสำหรับผู้เรียนทุกคน ดังนี้ จำนวนและการดำเนินการ การวัด เรขาคณิต พีชคณิต การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น และทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ การจัดหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานจะประสบความสำเร็จตามเป้าหมายที่คาดหวังได้ ทุกฝ่ายที่เกี่ยวข้องทั้งระดับชาติ ชุมชน ครอบครัว และบุคคลต้องร่วมรับผิดชอบโดยร่วมกันทำงานอย่างเป็นระบบ และต่อเนื่อง ในการวางแผน ดำเนินการ ส่งเสริมสนับสนุน ตรวจสอบ ตลอดจนปรับปรุงแก้ไขเพื่อพัฒนาเยาวชนของชาติไปสู่คุณภาพตามมาตรฐานการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ดังนี้ (กระทรวงศึกษาธิการ , 2544 : 3-5)

1. ความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ ระเบียบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วน รอบคอบ ทำให้สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจและแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม

คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการศึกษาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนศาสตร์อื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำรงชีวิต และช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังช่วยพัฒนาคนให้เป็นมนุษย์ที่สมบูรณ์ มีความสมดุลทั้งทางร่างกาย จิตใจ สติปัญญาและอารมณ์ สามารถคิดเป็น ทำเป็น แก้ปัญหาเป็น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข (กรมวิชาการ. 2544 ค : 1)

2. ลักษณะเฉพาะของวิชาคณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรม มีโครงสร้างซึ่งประกอบด้วยคำอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ที่เป็นข้อตกลงเบื้องต้น จากนั้นจึงใช้เหตุผลที่สมเหตุสมผล สร้างทฤษฎีต่าง ๆ ขึ้นมาแล้วนำไปใช้อย่างเป็นระบบ คณิตศาสตร์มีความถูกต้อง เที่ยงตรง คงเส้นคงวา มีระเบียบแบบแผน เป็นเหตุ เป็นผล และมีความสมบูรณ์ในตัวเอง (กรมวิชาการ. 2544 ค : 3)

คณิตศาสตร์เป็นทั้งศาสตร์และศิลป์ ที่ศึกษาเกี่ยวกับรูปแบบและความสัมพันธ์ เพื่อให้ได้ข้อสรุป และนำไปใช้ประโยชน์ คณิตศาสตร์มีลักษณะที่เป็นสากลที่ทุกคนเข้าใจตรงกัน ในการสื่อสาร สื่อความหมาย และถ่ายทอดความรู้ระหว่างศาสตร์ต่าง ๆ

3. วิสัยทัศน์การเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์

การศึกษาคณิตศาสตร์สำหรับหลักสูตรขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 เป็นการศึกษาเพื่อปวงชนที่เปิดโอกาสให้เยาวชนทุกคนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่องและตลอดชีวิตตามศักยภาพ ทั้งนี้เพื่อให้เยาวชนเป็นผู้ที่มีความรู้ ความสามารถทางคณิตศาสตร์ที่พอเพียง สามารถนำความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นไปพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดียิ่งขึ้น รวมทั้งสามารถนำไปเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และเป็นพื้นฐานสำหรับการศึกษาต่อ ดังนั้นจึงเป็นความรับผิดชอบของทางโรงเรียน ซึ่งเป็นสถานศึกษาที่ต้องจัดสาระการเรียนรู้ที่เหมาะสมต่อผู้เรียนแต่ละคน ทั้งนี้เพื่อให้บรรจุตามมาตรฐานการเรียนรู้ที่กำหนดไว้

สำหรับผู้เรียนที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ และต้องการเรียนรู้คณิตศาสตร์มากขึ้น ถือว่าเป็นหน้าที่ของทางโรงเรียนที่จะต้องจัดโปรแกรมการเรียนการสอนให้แก่ผู้เรียน เพื่อให้ผู้เรียนได้มีโอกาสเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ตามความสมัครใจและความสนใจ ทั้งนี้เพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้ที่ทัดเทียมกับนานาอารยประเทศ

4. สาระและมาตรฐานการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์

4.1 สาระการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์

หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ได้เน้นการจัดการศึกษาโดยกำหนดมาตรฐานการเรียนรู้ ในการพัฒนาผู้เรียนระดับพัฒนาการของผู้เรียนเป็น 4 ช่วงชั้น คือ ช่วงชั้นที่ 1 ประถมศึกษาปีที่ 1 – 3 ช่วงชั้นที่ 2 ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 – 6 ช่วงชั้นที่ 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1-3 ช่วงชั้นที่ 4 มัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 และกำหนดสาระการเรียนรู้ที่เป็นสาระหลักที่จำเป็นสำหรับผู้เรียนทุกคน ประกอบด้วยเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์และทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ในการจัดการเรียนรู้ ผู้สอนควรบูรณาการสาระต่าง ๆ เข้าด้วยกัน เท่าที่จะเป็นไปได้

สาระที่เป็นองค์ความรู้ของกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ประกอบด้วย

สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ
สาระที่ 2 การวัด
สาระที่ 3 เรขาคณิต
สาระที่ 4 พีชคณิต
สาระที่ 5 การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น
สาระที่ 6 ทักษะ / กระบวนการทางคณิตศาสตร์

สำหรับผู้เรียนที่มีความสนใจและความสามารถสูงทางคณิตศาสตร์ สถานศึกษาอาจจัดให้ผู้เรียนเรียนรู้สาระที่เป็นเนื้อหาวิชาให้กว้างขึ้น เข้มข้นขึ้น หรือฝึกทักษะกระบวนการมากขึ้น

โดยพิจารณาจากสาระหลักที่กำหนดให้ไว้นี้ หรือสถานศึกษาอาจจัดสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์อื่น ๆ เพิ่มเติมก็ได้ เช่น แคลคูลัสเบื้องต้น หรือทฤษฎีกราฟเบื้องต้น โดยพิจารณาให้เหมาะสมกับความสามารถและความต้องการของผู้เรียน

สำหรับช่วงชั้นที่ 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 หลักสูตรมุ่งเน้นการศึกษาเพื่อเพิ่มพูนความรู้และทักษะเฉพาะด้านมุ่งปลูกฝังความรู้ ความสามารถและทักษะในวิทยาการและเทคโนโลยี เพื่อให้ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ นำไปใช้ให้เกิดประโยชน์ในการศึกษาต่อ และการประกอบอาชีพ สาระและมาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่กำหนดไว้เป็นมาตรฐานที่จำเป็นสำหรับผู้เรียนทุกคน

4.2 มาตรฐานการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์

สาระที่ 1 : จำนวนและการดำเนินการ (Number and Operations)

มาตรฐาน ค 1.1 : เข้าใจความหลากหลายของการแสดงจำนวนและการใช้จำนวนในชีวิตจริง

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4

1. แสดงความสัมพันธ์ของจำนวนต่าง ๆ ในระบบจำนวนจริงได้
2. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง จำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะและจำนวนจริงในรูปกรณฑ์

มาตรฐาน ค 1.2 : เข้าใจถึงผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการของจำนวนและความสัมพันธ์ระหว่างการดำเนินการต่าง ๆ และสามารถใช้การดำเนินการในการแก้ปัญหาได้

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4

1. เข้าใจความหมายและหาผลลัพธ์ที่เกิดจากการบวก การลบ การคูณ การหาร จำนวนจริง จำนวนจริงที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำหลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะและจำนวนจริงที่อยู่ในรูปกรณฑ์

มาตรฐาน ค 1.3 : ใช้การประมาณค่าในการคำนวณและแก้ปัญหาได้

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4

1. หาค่าประมาณของจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์และจำนวนที่อยู่ในรูปเลขยกกำลังโดยใช้วิธีการคำนวณที่เหมาะสม

มาตรฐาน ค 1.4 : เข้าใจระบบจำนวนและสามารถนำสมบัติเกี่ยวกับจำนวนไปใช้ได้

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4

1. เข้าใจสมบัติของจำนวนที่เกี่ยวกับการบวก การคูณ การเท่ากับ การเท่ากัน และนำไปใช้ได้

สาระที่ 2 : การวัด (Measurement)

มาตรฐาน ค 1.2 : เข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการวัด

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4 -

มาตรฐาน ค 2.2 : วัดและคาดคะเนขนาดสิ่งที่ต้องการวัดได้

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4

1. ใช้ความรู้ในเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่กำหนดให้ในการคาดคะเนระยะทางและความสูงได้

มาตรฐาน ค 2.3 : แก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัดได้

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4

1. ใช้ความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติแก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัดได้

สาระที่ 3 : เรขาคณิต (Geometry)

มาตรฐาน ค 3.1 : อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติได้

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4 -

มาตรฐาน ค 3.2 : ใช้การนึกภาพ (Visualization) ใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (Spatial Reasoning) และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (Geometric Model) ในการแก้ปัญหาได้

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4 -

สาระที่ 4 : พีชคณิต (Algebra)

มาตรฐาน ค 4.1 : อธิบายและวิเคราะห์แบบรูป(Pattern) ความสัมพันธ์ และฟังก์ชันต่าง ๆ ได้

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4

1. มีความคิดรวบยอดในเรื่องเซตและการดำเนินการของเซต
2. เข้าใจและใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัยได้
3. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน เขียนแทนความสัมพันธ์ และฟังก์ชันในรูปต่าง ๆ เช่น สมการ กราฟ และตารางได้
4. เข้าใจความหมายของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต และหาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิตได้

มาตรฐาน ค 4.2 : ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ แทนสถานการณ์ต่าง ๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหาได้

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4

1. เขียนแผนภาพแทนเซต (Venn - Euler Diagram) และนำไปใช้ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาสมาชิกของเซตได้
2. บอกได้ว่าการอ้างเหตุผลสมเหตุสมผลหรือไม่โดยใช้แผนภาพแทนเซต (Venn - Euler Diagram)
3. แก้สมการและอสมการตัวแปรเดียวดีกรีไม่เกินสองได้
4. สร้างความสัมพันธ์หรือฟังก์ชันจากสถานการณ์หรือปัญหาที่กำหนดให้และนำไปใช้ได้
5. เข้าใจความหมายของผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิตหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเลขาคณิตโดยใช้สูตร และนำไปใช้ได้
6. เขียนกราฟของสมการ อสมการ ฟังก์ชัน และนำไปใช้แก้ปัญหาได้

สาระที่ 5 : การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น (Data Analysis and Probability)

มาตรฐาน ค 5.1 : เข้าใจและวิธีการทางสถิติในการวิเคราะห์ข้อมูล

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4

1. รู้จักวิธีการสำรวจความคิดเห็นอย่างง่าย
2. เลือกใช้ค่ากลางที่เหมาะสมกับข้อมูลที่กำหนดให้ และวัตถุประสงค์ที่ต้องการ
3. วิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้นโดยใช้ค่ากลาง (ค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยม) การวัดการกระจาย โดยใช้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และการหาตำแหน่งที่ของข้อมูลโดยใช้เปอร์เซ็นไทล์ได้

มาตรฐาน ค 5.2 : ใช้วิธีการทางสถิติและความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์ได้อย่างสมเหตุสมผล

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4

1. อธิบายการทดลองสุ่ม เหตุการณ์ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ และนำผลที่ได้ไปใช้ในการคาดการณ์บางอย่างได้

2. นำผลที่ได้จากการทดลองหรือการสำรวจความคิดเห็นไปใช้ในการคาดการณ์บางอย่างได้

มาตรฐาน ค 5.3 : ใช้ความรู้เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็น ช่วยในการตัดสินใจและแก้ปัญหาได้

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4

1. ใช้ข้อมูลข่าวสารและค่าสถิติช่วยในการตัดสินใจได้
2. ใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นช่วยในการตัดสินใจและแก้ปัญหาได้

สาระที่ 6 : ทักษะ / กระบวนการทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Skills / Processes)

มาตรฐาน ค 6.1 : มีความสามารถในการแก้ปัญหา

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4

1. ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหาได้
2. แก้ปัญหาในสถานการณ์จริงโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ได้
3. ใช้ความรู้ ทักษะ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม

มาตรฐาน ค 6.2 : มีความสามารถในการใช้เหตุผล

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4

1. นำวิธีการให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัยมาช่วยในการค้นหาความจริงหรือข้อสรุปและช่วยในการตัดสินใจบางอย่างได้

มาตรฐาน ค 6.3 : มีความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4

1. ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมายและนำเสนอได้อย่างถูกต้อง ชัดเจน และรัดกุม

มาตรฐาน ค 6.4 : มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ ได้

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4

1. เชื่อมโยงความคิดรวบยอด หลักการ และวิธีการทางคณิตศาสตร์และศาสตร์อื่น ๆ เพื่ออธิบายข้อสรุปหรือเรื่องราวต่าง ๆ ได้

2. นำความรู้และทักษะที่ได้จากการเรียนคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ในการเรียนรู้งานและในการดำรงชีวิต

มาตรฐาน ค 6.5 : มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4

1. มีความคิดริเริ่มสรรค์ในการทำงาน

สาระเพิ่มเติม 1 : แคลคูลัส

มาตรฐาน 1 : มีความรู้ความเข้าใจในเรื่องลิมิตของลำดับ อนุกรมอนันต์ ลิมิตของฟังก์ชัน ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน และปริพันธ์ของฟังก์ชัน

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4

1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเรื่องลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์
2. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน ฟังก์ชันต่อเนื่อง อนุพันธ์และปริพันธ์ของฟังก์ชัน

มาตรฐาน ค 2 : นำความรู้ในเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน ไปใช้ได้

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4

1. หาลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
2. นำความรู้เรื่องลำดับและอนุกรม ไปใช้แก้ปัญหาได้
3. นำความรู้เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันไปใช้ในการแก้ปัญหาบางประการได้
4. หาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้และหาปริพันธ์จำกัดเขตบนช่วงที่กำหนดให้ได้
5. หาพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งบนช่วงที่กำหนดให้ได้

สรุปหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ได้กำหนดสาระและมาตรฐานการเรียนรู้เป็นเกณฑ์ในการกำหนดคุณภาพของผู้เรียนเมื่อจบการศึกษาขั้นพื้นฐาน ซึ่งกำหนดไว้เฉพาะส่วนที่จำเป็นสำหรับพื้นฐานในการดำรงชีวิตให้มีคุณภาพ สำหรับสาระและมาตรฐานการเรียนรู้ตามความสามารถ ความถนัด และความสนใจของผู้เรียน สถานศึกษาสามารถเพิ่มเติมได้ สาระและมาตรฐานการเรียนรู้คณิตศาสตร์ประกอบ ด้วย สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ สาระที่ 2 การวัด สาระที่ 3 เรขาคณิต สาระที่ 4 พีชคณิต สาระที่ 5 การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น สาระที่ 6 ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ สำหรับเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เป็นเนื้อหาหนึ่งในสาระที่ 2 การวัด กำหนดให้เรียน 10 ชั่วโมง ซึ่งประกอบด้วยเนื้อหา ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม การใช้ตารางค่าและกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ กฎของโคไซน์และไซน์ และการหาระยะทางและ ความสูง เป็นต้น

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

คำว่า "ตรีโกณมิติ" ตรงกับภาษาอังกฤษ "Trigonometry" ซึ่งหมายถึง การวัดรูปสามเหลี่ยม วิชาตรีโกณมิติเกิดจากความจำเป็นในการวัดระยะทาง พื้นที่ มุม และทิศทางที่ยากแก่การวัดโดยตรง ในสมัยก่อนวิชานี้จึงว่าด้วยความสัมพันธ์ระหว่างมุมและด้านของรูปสามเหลี่ยมเท่านั้น จึงได้จัดสาระการเรียนรู้ตามลำดับดังนี้ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2544 : 64-182)

1. ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

การกำหนดค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ทำได้โดยใช้วงกลมรัศมี 1 หน่วย ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดเป็นหลักในการกำหนดค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และจะเรียกวงกลมดังกล่าวว่า วงกลมหนึ่งหน่วย (The unit circle) วงกลมนี้เป็นกราฟของความสัมพันธ์

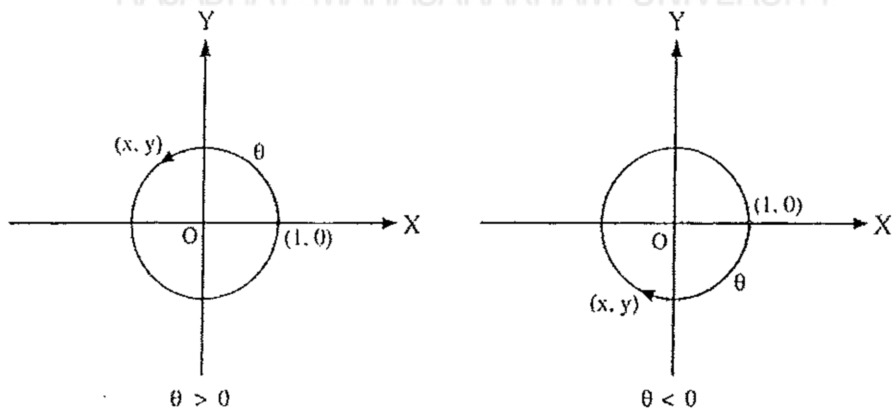
$$\{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ (ทีตา) ให้จากจุด $(1,0)$ วัดระยะไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยให้ยาว $|\theta|$ หน่วย จึงถึงจุด (x, y) ซึ่งอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วยโดยมีข้อตกลงสำหรับทิศทางของการวัดครั้งนี้

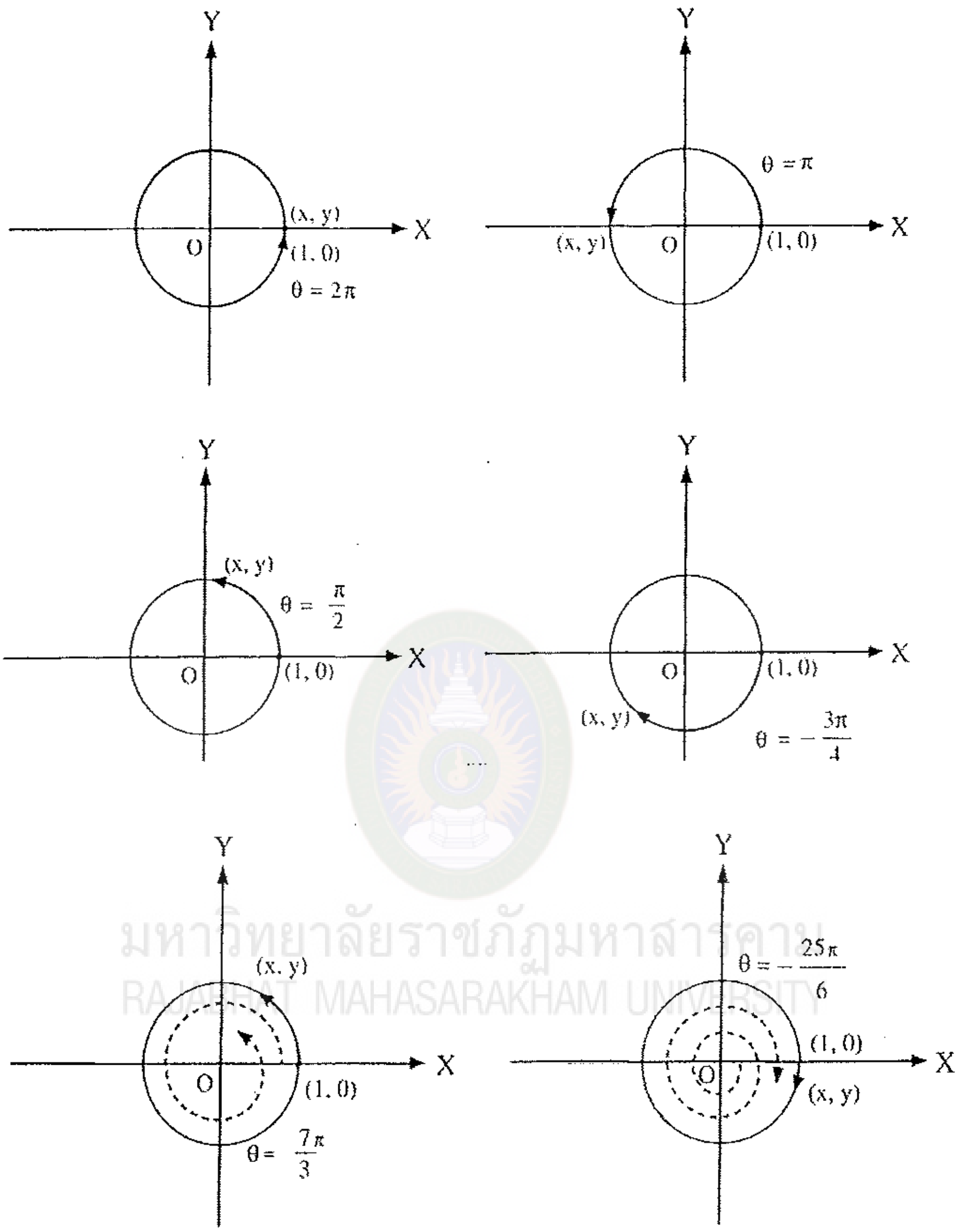
ถ้า $\theta > 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1,0)$ ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ถ้า $\theta < 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1,0)$ ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

ถ้า $\theta = 0$ จุดปลายส่วนโค้งคือจุด $(1,0)$



รูปต่อไปนี้แสดงตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนด θ ให้มีค่าต่าง ๆ กัน



จะเห็นว่าเมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้จะสามารถหาจุด (x, y) ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย ในทิศทางการวัดที่กำหนดได้เพียงจุดเดียวเท่านั้นถ้า $|\theta| > 2\pi$ แสดงว่า วัดส่วนโค้งเกิน 1 รอบ เพราะเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย

ดังนั้นจึงสามารถกำหนดฟังก์ชัน $f : R \to R$ และ $g : R \to R$ โดยที่ สำหรับแต่ละจำนวนจริง θ ใด ๆ

$$f(\theta) = x$$

$$g(\theta) = x$$

เมื่อ (x,y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด (1, 0) ยาว $|\theta|$ หน่วย ในทิศทางตามที่กล่าวข้างต้น

เรียกฟังก์ชัน g และ f ดังกล่าวนี้ว่า ฟังก์ชัน ไซน์ (sine) และฟังก์ชันโคไซน์ (cosine) ตามลำดับ และจะเขียนแทน g ด้วย sin และเขียนแทน f ด้วย cos

$y = \sin\theta$ (อ่านว่า วาย เท่ากับ ไซน์ทีตา)

$x = \cos\theta$ (อ่านว่า เอกซ์ เท่ากับ คอสทีตา)

วงกลมหนึ่งหน่วยซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด เป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x,y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 1\}$ จะเห็นว่า $-1 \le y \le 1$ และ $-1 \le x \le 1$ ดังนั้น ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์จะเป็นจำนวนจริงตั้งแต่ - 1 ถึง 1

นั่นคือ เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริง ตั้งแต่ - 1 ถึง 1 และโดเมนของฟังก์ชันทั้งสองคือเซตของจำนวนจริง

จากสมการ $x^2 + y^2 = 1$, $y = \sin\theta$, $x = \cos\theta$ จะได้ความสัมพันธ์ ของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ ดังนี้

$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1,$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง หรือเขียนตามความนิยมได้เป็น

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1,$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง

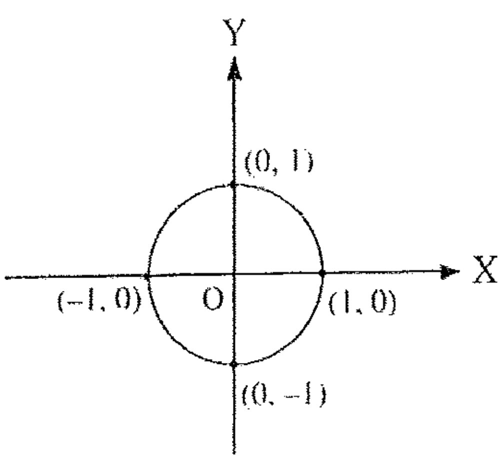
หมายเหตุ $\cos^2\theta$ หมายถึง $(\cos\theta)(\cos\theta)$

$\cos^2\theta$ หมายถึง cos ของจำนวนจริง θ^2

2. ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

2.1 ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

ในหัวข้อนี้จะหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ สำหรับ θ บางค่าที่สามารถหาพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่วัดจากจุด (1,0) ที่ยาว $|\theta|$ หน่วยได้ด้วยวิธีง่าย ๆ



ถ้า $\theta = 0$ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 0 หน่วย คือ (1,0) ดังรูป

จะได้ $\sin 0 = 0$

$\cos 0 = 1$

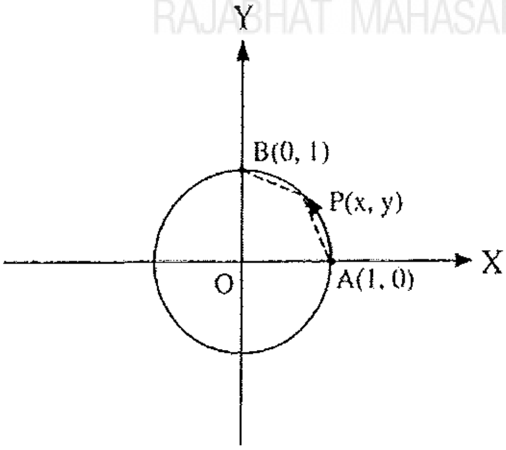
เนื่องจากเส้นรอบของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$ หน่วย จะมีพิกัดเป็นจุดใดจุดหนึ่งต่อไปนี้คือ (0,1) , (-1,0) และ (0,-1) จะได้

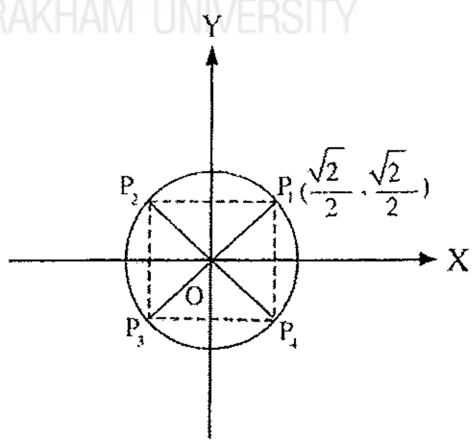
$$\sin\frac{\pi}{2}=1, \qquad \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$$
$$\sin(\pi)=0, \qquad \sin(-\pi)=0$$
$$\sin\frac{3\pi}{2}=-1, \qquad \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=1$$
$$\cos\frac{\pi}{2}=0, \qquad \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$$
$$\cos(\pi)=-1, \qquad \cos(-\pi)=-1$$
$$\cos\frac{3\pi}{2}=0, \qquad \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=0$$

จะเห็นได้ว่าค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\theta=\frac{n\pi}{2}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มนั้น หาได้จากพิกัดของจุดส่วนปลายส่วนโค้งที่ยาว $\left|\frac{n\pi}{2}\right|$ หน่วย โดยวัดในทิศทางที่สอดคล้องกับ θ ซึ่งจุดปลายนั้นเป็นจุดใดจุดหนึ่งในสี่จุดต่อไปนี้คือ (1,0) (0,1) (-1,0) และ (0,-1)

ต่อไปนี้จะพิจารณาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ θ เป็น $\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}$ และ $\frac{\pi}{3}$

ค่าของ $\sin\frac{\pi}{4}$ และ $\cos\frac{\pi}{4}$





ให้ P(x ,y) เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้ง AB

เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง AP ยาวเท่ากับส่วนโค้ง PB และยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย

จะได้ คอร์ด PB ยาวเท่ากับคอร์ด PA

นั่นคือ $PB = PA$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

$$x^2+y^2-2y+1 = x^2-2x+1+y^2$$

จะได้ $x = y$

แต่ $x^2+y^2 = 1$ (เพราะจุด (x. y) อยู่บนวงกลม)

ดังนั้น $2x^2 = 1$

หรือ $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

เนื่องจาก (x. y) เป็นจุดอยู่ในควอดรันต์ที่ 1

ดังนั้น x และ y จะเป็นจำนวนบวก

จะได้ $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย คือ จุด $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

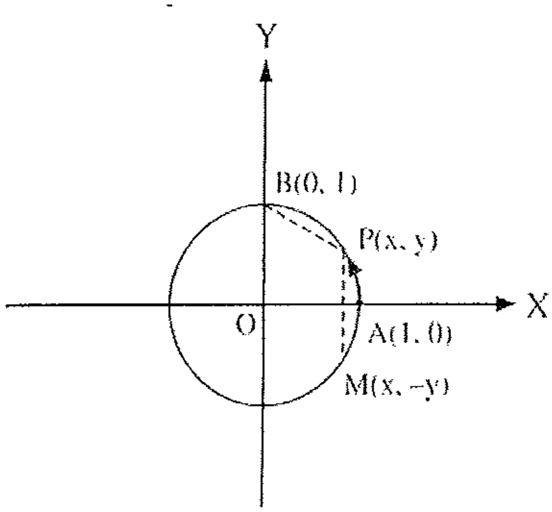
นั่นคือ $\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071$

โดยอาศัยรูปที่ 2 ยังสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง

$\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\ldots,\frac{(2n+1)\pi}{4}$ เมื่อ n คือ จำนวนเต็มบวก

และ $-\frac{3\pi}{4},-\frac{5\pi}{4},-\frac{7\pi}{4},\ldots,-\frac{(2n+1)\pi}{4}$ เมื่อ n คือ จำนวนเต็มบวก

ค่าของ $\sin\frac{\pi}{6}$ **และ** $\cos\frac{\pi}{6}$



ให้จุด P(x , y) เป็นจุดบนส่วนโค้ง AB ซึ่งทำให้ส่วนโค้ง AP ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย

เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย ดังนั้น ส่วนโค้ง PB จึงยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

ให้จุด M เป็นภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อนของจุด P โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน

จะได้ส่วนโค้ง AM ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย และ M จะมีพิกัดเป็น (x , y)

ดังนั้น ส่วนโค้ง PM จึงยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

จะได้คอร์ด PM ยาวเท่ากับคอร์ด PB

นั่นคือ PM = PB

$$\sqrt{(y-(-y))^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

$$4y^2 = x^2+y^2-2y+1$$

$$4y^2+2y-2 = 0 \text{ (เนื่องจาก } x^2+y^2=1)$$

$$2y^2+y-1 = 0$$

$$(2y-1)(y+1) = 0$$

เนื่องจาก (x , y) เป็นจุดอยู่ในควอดรันต์ที่ 1

ดังนั้น x และ y จึงเป็นจำนวนบวก

จะได้ $y=\frac{1}{2}$

และ $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

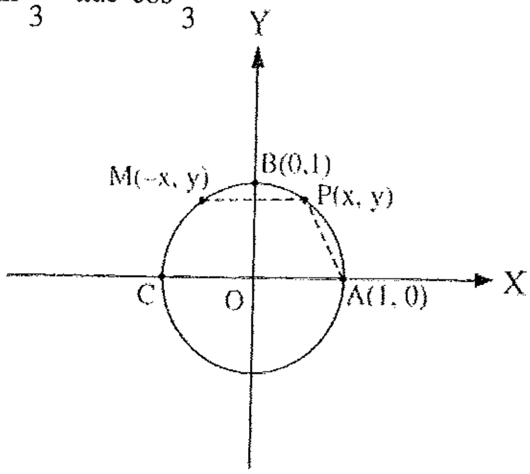
ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย คือ จุด $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

นั่นคือ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = 0.5000$

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660$

โดยอาศัยรูปที่ 3 อาจหาค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงในรูป $2n\pi\pm\frac{\pi}{6}$, $2n\pi\pm\frac{5\pi}{6}$, $2n\pi\pm\frac{7\pi}{6}$ และ $2n\pi\pm\frac{11\pi}{6}$, เมื่อ n คือจำนวนเต็ม เช่น $-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{13\pi}{6}$ เป็นต้น

ค่าของ $\sin\frac{\pi}{3}$ และ $\cos\frac{\pi}{3}$



ให้จุด P(x , y) เป็นจุดบนส่วนโค้ง AB ที่ทำให้ส่วนโค้ง AP ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

ให้จุด M เป็นภาพสะท้อนของจุด P (x , y) โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน

ดังนั้น พิกัดของจุด M คือ (-x , y) และส่วนโค้ง CM ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

เนื่องจากส่วนโค้งของครึ่งวงกลมนี้ยาว π หน่วย ดังนั้น ส่วนโค้ง PM ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

จะได้คอร์ด PM ยาวเท่ากับคอร์ด PA

นั่นคือ PM = PA

$$\sqrt{(x-(-x))^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$$
$$4x^2 = x^2-2x+1+y^2$$
$$4x^2+2x-2 = 0 \text{ (เนื่องจาก } x^2+y^2=1)$$
$$2(2x-1)(x+1) = 0$$

เนื่องจาก P(x, y) เป็นจุดอยู่ในควอดรันต์ที่ 1

ดังนั้น x และ y จึงเป็นจำนวนบวก

จะได้ $x = \frac{1}{2}$ และ $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย คือ จุด $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

นั่นคือ $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660$

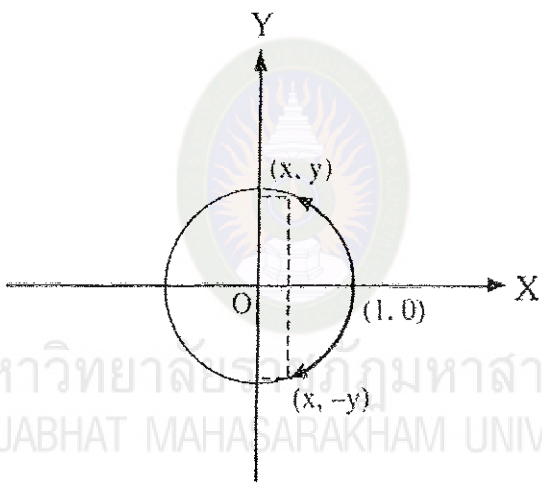
$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = 0.5000$

โดยอาศัยรูปที่ 4 อาจหาค่าของฟังก์ชันไซน์ และโคไซน์ของจำนวนจริงในรูป

$2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$, $2n\pi \pm \frac{4\pi}{3}$ และ $2n\pi \pm \frac{5\pi}{3}$, เมื่อ n คือจำนวนเต็ม เช่น $-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$ เป็นต้น

2.2 ค่าของฟังก์ชันไซน์ และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ

พิจารณาจำนวนจริง $\theta > 0$ และ (x , y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด (1 ,0) ไปในทิศทวนเข็มนาฬิกา ยาว θ หน่วย (เนื่องจาก $\theta > 0$ จึงได้ $|\theta| = \theta$) จากการที่จุด (x , y) เป็นภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อนจุด (x , y) โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน จึงได้จุด (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมดังกล่าว ที่วัดจากจุด (1, 0) ไปในทิศตามเข็มนาฬิกายาว θ หน่วย หรือกล่าวได้ว่า (x, y) เป็นจุดปลายของส่วนโค้งที่เกิดจากจำนวนจริง $-\theta$ ตามข้อตกลงเรื่องการวัดส่วนโค้งที่กล่าวมาแล้ว



จากจุด (x,y) และ (x,y) ทำให้สรุปได้ว่า

$$x = \cos\theta, \qquad y = \sin\theta$$

และ $x = \cos(-\theta), \qquad -y = \sin(-\theta)$

ดังนั้น $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ และ $\cos(-\theta) = \cos\theta$

นั่นคือ ถ้าสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกใด ๆ ได้ก็จะหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบที่เป็นจำนวนตรงข้างของจำนวนจริงบวกนั้น ๆ ได้ด้วย

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ และ $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

วิธีทำ เพราะว่า $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ และ $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

จะได้ $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

เนื่องจากค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบจะหาได้เมื่อทราบค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกที่เป็นจำนวนตรงข้ามของจำนวนจริงลบนั้น ต่อไปนี้จะพิจารณาเฉพาะวิธีหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกเท่านั้น

ถ้า $\theta > 2\pi$ และหาร θ ด้วย 2π แล้วได้ n เหลือเศษ α (แอลฟา) นั่นคือ $\theta = 2n\pi + \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว และ $0 \le \alpha < 2\pi$

ดังนั้น การวัดส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยจากจุด (1,0) ไปยาว θ หน่วยนั้น จึงวัดไป α หน่วยก็เพียงพอแล้ว เพราะจำนวน $2n\pi$ แสดงว่า การวัดต้องวัดครบรอบวงกลม n รอบ จึงสรุปได้ว่า

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin\theta = \sin(2n\pi + \alpha) = \sin\alpha \\ \cos\theta = \cos(2n\pi + \alpha) = \cos\alpha \end{array}}$$

จากสมบัติข้างต้นนี้จะเห็นว่า ถ้าสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำวนจริงที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 2π ได้แล้ว จะหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกทุกจำนวนได้ด้วย ซึ่งจะทำให้หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบทุกจำนวนได้เสมอ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\sin\frac{25\pi}{4}$ และ $\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$

วิธีทำ เพราะว่า
$$\frac{25\pi}{4} = 6\pi + \frac{\pi}{4} = (3\times 2\pi) + \frac{\pi}{4}$$

ดังนั้น
$$\sin\frac{25\pi}{4} = \sin\left\{(3\times 2\pi) + \frac{\pi}{4}\right\} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

และ
$$\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right) = \cos\frac{11\pi}{3} = \cos\left(2\pi + \frac{5\pi}{3}\right)$$

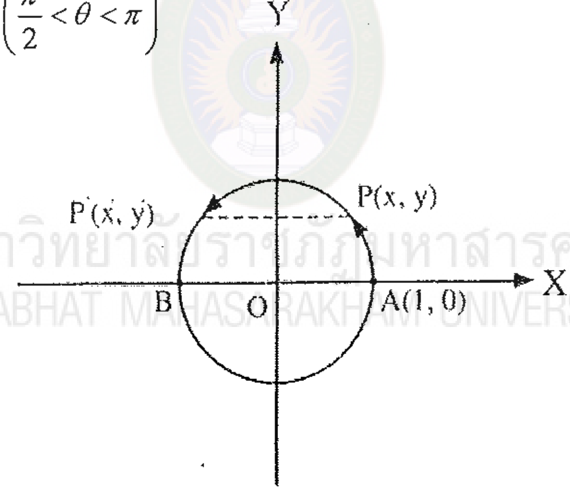
$$= \cos\frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{1}{2}$$

เราทราบแล้วว่า เมื่อหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริง ตั้งแต่ 0 ถึง 2π ได้ ก็จะหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ได้ แต่เนื่องจากวงกลมหนึ่งหน่วยมีแกน X และ Y เป็นแกนสมมาตร การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π จึงหาได้จากค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$

การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ ทำได้ดังนี้

1. เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่ 2

$\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$



ให้ $P'(x', y')$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

ดังนั้น $y' = \sin\theta$ และ $x' = \cos\theta$ ให้ $\alpha = \pi - \theta$

จะได้ว่า $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว π หน่วย ส่วนโค้ง $P'B$ จึงยาว α หน่วย

ให้จุด P(x,y) เป็นภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อนของจุด $P'(x', y')$ โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน

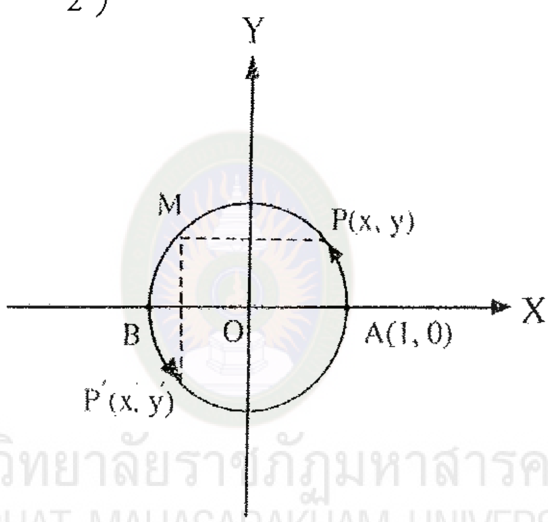
ดังนั้น ส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย และ $y' = y, x' = -x$

เมื่อจุด P(x,y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว α หน่วย

ดังนั้น $y = \sin\alpha$ และ $x = \cos\alpha$ แต่ $y = y' = \sin\theta = \sin(\pi - \alpha)$ และ $-x = x' = \cos\theta = \cos(\pi - \alpha)$ ทำให้ได้ว่า

$\sin\theta = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$	เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
$\cos\theta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$	เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

2. เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่ 3 $\left(\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}\right)$



เมื่อ $\left(\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}\right)$ สามารถเขียน $\theta = \pi + \alpha$ โดยที่ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ให้ $P'(x', y')$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

ดังนั้น $y' = \sin\theta$ และ $x' = \cos\theta$

เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว π หน่วย ส่วนโค้ง BP' จึงยาว α หน่วย

ให้จุด M เป็นภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อนของจุด $P'(x', y')$ โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน และจุด P(x, y) เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนของจุด M โดยมี แกน Y เป็นเส้นสะท้อน

ดังนั้น ส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย $y' = -y$, $x' = -x$

จุด P(x,y) จึงเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว α หน่วยด้วย

จะได้ $y = \sin\alpha$ และ $x = \cos\alpha$

แต่ $-y = y' = \sin\theta = \sin(\pi + \alpha)$

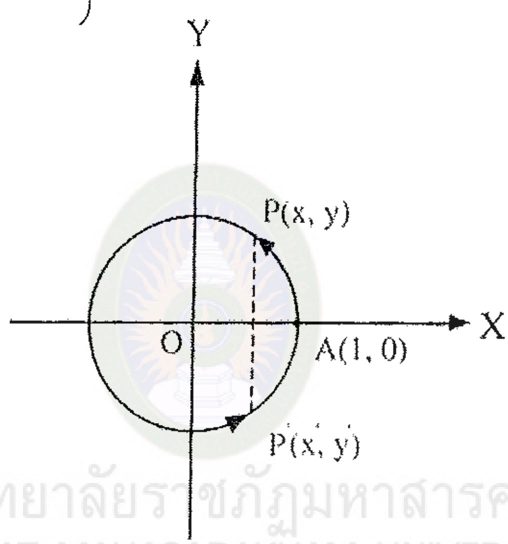
และ $-x = x' = \cos\theta = \cos(\pi+\alpha)$

ทำให้ได้ว่า

$\sin\theta = \sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$	เมื่อ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta = \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$	เมื่อ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

3. เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในควอดรันต์ที่ 4

$\left(\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi\right)$



เมื่อ $\left(\frac{2\pi}{2}<\theta<2\pi\right)$ สามารถเขียน $.\theta = 2\pi-\alpha$ โดยที่ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

ให้ $P'(x',y')$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

ดังนั้น $y' = \sin\theta$ และ $x' = \cos\theta$

เนื่องจากเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว $.2\pi$ หน่วย

จะได้ส่วนโค้ง $P'A$ ยาว α หน่วย

ให้จุด P(x,y) เป็นภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อนของจุด $P'(x',y')$ โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน

ดังนั้น ส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย และ $y' = -y,\ x' = x$

เมื่อ P(x, y) เป็นจุดส่วนปลายโค้งที่ยาว α หน่วย

จะได้ $y = \sin\ \alpha$ และ $x = \cos\ \alpha$

แต่ $-y = y' = \sin\theta = \sin(\pi-\alpha)$

และ $-x = x' = \cos\theta = \cos(\pi - \alpha)$

ทำให้ได้ว่า

$$\sin\theta = \sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha \qquad \text{เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\theta = \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha \qquad \text{เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

3. ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ

นอกจากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ดังกล่าวแล้วข้างต้น ยังมีฟังก์ชันตรีโกณมิติที่สำคัญอีกหลายฟังก์ชัน ดังต่อไปนี้

ฟังก์ชันแทนเจนต์ (Tangent) เขียนแทนด้วย tan (อ่านว่า แทน)

ฟังก์ชันซีแคนต์ (Secant) เขียนแทนด้วย sec (อ่านว่า เซก)

ฟังก์ชันโคซีแคนต์ (Cosecant เขียนแทนด้วย cosec หรือ csc (อ่านว่า โคเซก)

ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (Cotangent) เขียนแทนด้วย cot หรือ ctn (อ่านว่า คอต)

นิยามค่าของฟังก์ชันโดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ดังนี้

บทนิยาม

สำหรับจำนวนจริง θ ใดๆ

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \text{เมื่อ } \cos\theta \neq 0$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \text{เมื่อ } \cos\theta \neq 0$$

$$\mathrm{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \text{เมื่อ } \sin\theta \neq 0$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \text{เมื่อ } \sin\theta \neq 0$$

จากค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติข้างต้น อาจหาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่างๆ ได้เช่น

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \qquad \text{เมื่อ } \tan\theta \neq 0 \text{ หรือ } \sin\theta \neq 0$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad \text{เมื่อ } \cos\theta \neq 0$$

$$1 + \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta \qquad \text{เมื่อ } \sin\theta \neq 0$$

สำหรับความสัมพันธ์อื่น ๆ ที่ไม่ได้แสดงพิสูจน์ไว้ ก็สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ นอกจากที่กล่าวมาข้างต้น จะได้กล่าวถึงต่อไป

เมื่อฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดใหม่ทั้งหมดมีค่าขึ้นมีค่าอยู่กับค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ดังนั้น จึงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติเหล่านั้นได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

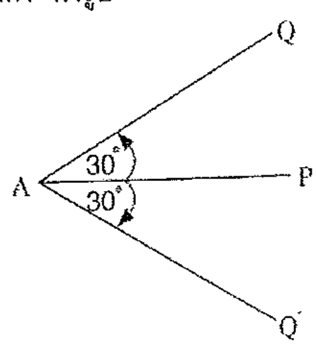
ตารางแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของจำนวนจริงบางจำนวนเมื่อ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
0	0	1	0	ไม่นิยาม	1	ไม่นิยาม
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	ไม่นิยาม	1	ไม่นิยาม	0

4. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

4.1 มุมและการวัดมุม

กำหนดส่วนของเส้นตรง AP ต้องการสร้าง PAQ โดยให้มีขนาด 30° โดยใช้ไม้โพรแทรกเตอร์วัดขนาดของมุม ทำได้โดยวางไม้โพรแทรกเตอร์ทับส่วนของเส้นตรง AP ซึ่งสามารถวัดขนาดของมุมที่ต้องการสร้างได้ 2 แบบ คือ การวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา และการวัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ดังรูป



เรียกจุด A ว่า *จุดยอด* (vertex) ของมุม

เรียกส่วนของเส้นตรง AP ว่า *ด้านเริ่มต้น* (initial side) ของมุม

เรียกส่วนของเส้นตรง AQ หรือ AQ' ว่า *ด้านสิ้นสุด* (terminal side) ของมุม

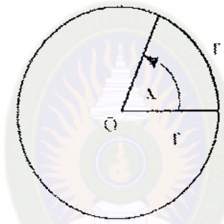
ดังนั้นการวัดขนาดของมุมทำได้โดยการวัดจากด้านเริ่มต้นไปยังด้านสิ้นสุด สำหรับการบอกขนาดของมุมมีข้อตกลงว่า ถ้าวัดมุมในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจะแสดงขนาดของมุมด้วยจำนวนบวก ถ้าวัดมุมในทิศทางตามเข็มนาฬิกาจะแสดงขนาดของมุมด้วยจำนวนลบ

หน่วยในการวัดมุมที่รู้จักกันแล้ว คือ องศา (°) โดยถือว่ามุมที่เกิดจากการหมุนส่วนของเส้นตรงไปครบหนึ่งรอบมีขนาด 360 องศา และแบ่งหน่วยองศาออกเป็น หน่วยย่อยคือ ลิปดา (') และพิลิปดา (") ดังนี้

$$1^\circ = 60'$$

$$1' = 60''$$

หน่วยวัดมุมที่สำคัญอีกหน่วยหนึ่งคือ เรเดียน (radian)



มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้นถือว่าเป็นมุมที่มีขนาด 1 เรเดียน

เนื่องกาวงกลมที่มีรัศมียาว r หน่วย จะมีเส้นรอบวงยาว $2\pi r$ หน่วย ดังนั้น มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาว $2\pi r$ หน่วย จึงมีขนาด $\frac{2\pi r}{r}$ เรเดียน หรือ 2π เรเดียน และมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม ซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งครึ่งวงกลมที่ยาว πr หน่วย จะมีขนาด $\frac{\pi r}{r}$ เรเดียน หรือ π เรเดียน

จะเห็นได้ว่า สำหรับมุมที่จัดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมียาว r ซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาว a หน่วย จะมีขนาด $\frac{a}{r}$ เรเดียน และถ้าให้ขนาดของมุมดังกล่าวเป็น 0 เรเดียน จะได้ $\theta = \frac{a}{r}$

เนื่องจากมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมียาว r หน่วย ที่ได้จากการหมุนรัศมีไปครบ 1 รอบ มีขนาด 2π เรเดียน แต่มุมดังกล่าวเมื่อวัดเป็นองศา วัดได้ 360 องศา ดังนั้น

360 องศา = 2π เรเดียน

หรือ 180 องศา = π เรเดียน

ดังนั้น 1 องศา $= \dfrac{\pi}{180}$ เรเดียน ≈ 0.01745 เรเดียน

และ 1 เรเดียน $= \dfrac{180}{\pi}$ องศา $\approx 57^\circ 18'$

โดยทั่วไปการเขียนขนาดของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนมักจะไม่เขียนหน่วยกำกับไว้ ดังนั้นถ้ากล่าวถึงขนาดของมุมโดยไม่มีหน่วยกำกับให้ถือว่ามุมนั้นมีหน่วยเป็นเรเดียน

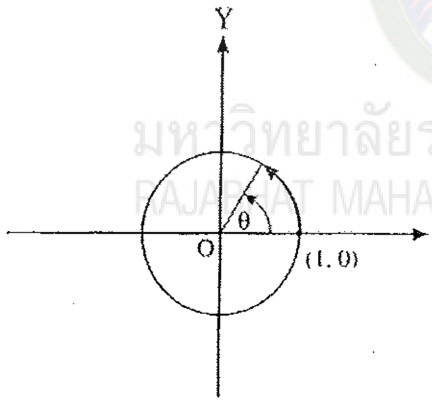
จากความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมในหน่วยองศาและหน่วยเรเดียนที่กล่าวมาข้างต้น จะได้ว่า เมื่อทราบขนาดของมุมในหน่วยใดหน่วยหนึ่งแล้ว จะสามารถหาขนาดของมุมนั้นในอีกหน่วยได้ ดังตังอย่างต่อไปนี้

4.2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

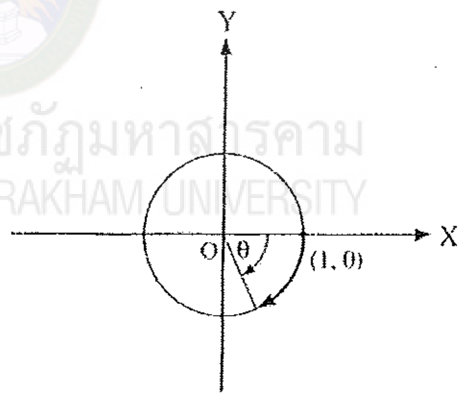
ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กล่าวมาแล้วนั้น เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง ต่อไปนี้จะพิจารณาถึงฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

เมื่อจุดยอดของมุม ๆ หนึ่งอยู่ที่จุด $(0, 0)$ และด้านเริ่มต้นของมุมนั้นทาบไปตามแกน X ทางบวก จะกล่าวว่ามุมนั้นอยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน (standard position)

สมมุติว่า มุม ๆ หนึ่งมีขนาด θ เรเดียน อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน ดังรูป



$\theta > 0$



$\theta < 0$

โดยที่ส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางขนาด 1 เรเดียน นั้นจะต้องยาว 1 หน่วย ดังนั้น ส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางขนาด θ เรเดียน จึงยาว θ หน่วย

จะเห็นได้ว่า จุดที่ด้านสิ้นสุดของมุมขนาด θ เรเดียนตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยนั้น มีเพียงจุดเดียวและเป็นจุดเดียวกันกับจุดปลายส่วนโค้งที่วัดจากจุด $(1,0)$ ยาว $|\theta|$ หน่วย ในทิศทางที่สอดคล้องกับ θ เช่นจุดที่ด้านสิ้นสุดของมุม $-\dfrac{\pi}{4}$ เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วย คือจุด

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ซึ่งเป็นจุดเดียวกับจุดปลายส่วนโค้งที่วัดจากจุด (1,0) ในทิศตามเข็มนาฬิกายาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย

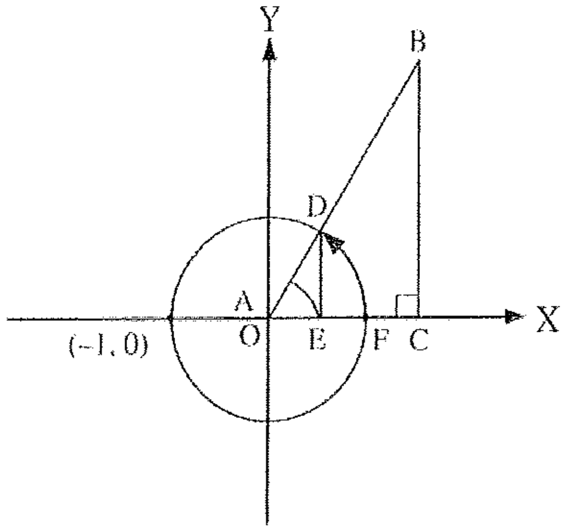
ดังนั้นเมื่อกำหนดมุมขนาด θ เรเดียนให้หนึ่งมุม จะหาจุดที่ด้านสิ้นสุดของมุมนั้นตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยได้เพียงจุดเดียว และจุดนั้นเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วยด้วย หรือส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุม θ เรเดียน จะยาว $|\theta|$ หน่วย จะเห็นได้ว่า ไม่ว่าจะใช้วิธีวัดมุม หรือวัดความยาวส่วนโค้งของวงกลม จุดที่ด้านสิ้นสุดของมุมตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยจะเป็นจุดเดียวกับจุดปลายของส่วนโค้ง

จึงสรุปได้ว่า ไม่ว่าจะนิยามฟังก์ชั่นตรีโกณมิติในแง่ของมุม หรือในแง่ของความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหนึ่งหน่วยที่รองรับมุม ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของจำนวนเหล่านั้นจะมีค่าเท่ากัน เช่น cos อาจหมายถึง cos ของมุมที่มีขนาด θ เรเดียน หรือ cos ของจำนวนจริง θ ก็ได้

เนื่องจากหน่วยในการวัดมุมที่นิยมใช้กันนั้นมีอยู่สองหน่วย คือ เรเดียน และองศา จากที่กล่าวแล้วข้างต้นจะเห็นว่า เมื่อหน่วยของมุมซึ่งอยู่ในตำแหน่งมาตรฐานมีหน่วยเป็นเรเดียน จำนวนที่แสดงค่าของมุมนั้นจะเป็น เรเดียน จำนวนที่แสดงค่าของมุมนั้นจะเป็นจำนวนเดียวกับจำนวนจริงที่แสดงความยาวและทิศทางของส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุมนั้น ดังนั้นเมื่อต้องการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนจึงหาได้ตามที่กล่าวมาแล้ว ส่วนการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นองศานั้นอาจหาได้โดยเปลี่ยนค่าของมุมจากหน่วยองศา ให้เป็นหน่วยเรเดียนก่อน แล้วจึงหาค่าของฟังก์ชันนั้นเช่นเดียวกับการหาค่าของฟังก์ชั่นตรีโกณมิติของจำนวนจริงทั่วๆ ไป

4.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ประโยชน์สำคัญประการหนึ่งของฟังก์ชันตรีโกณมิติคือ การนำไปใช้ในการหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยม ต่อไปนี้จะพิจารณาถึงฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ซึ่งมี $A\hat{B}C$ เป็นมุมฉาก ดังนั้น $B\hat{A}C < 90°$ ให้ a, b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A,B และ C ตามลำดับของรูปสามเหลี่ยม ให้ $A\hat{B}C$ อยู่ในตำแหน่งมาตรฐานดังรูป ส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุม A คือ ส่วนโค้ง FD

ดังนั้น $\sin A$ = sin (ความยาวส่วนโค้ง FD) = DE

$\cos A$ = cos (ความยาวส่วนโค้ง FD) = AE

เนื่องจากรูปสามเหลี่ยม ADE และรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมคล้าย

ดังนั้น $\dfrac{DE}{AD} = \dfrac{BC}{AB}$ และ $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AC}{AB}$

แต่ $AD = 1$

ดังนั้น $DE = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{a}{c}$ และ $AE = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{b}{c}$

นั่นคือ $\sin A = \dfrac{a}{c}$, $\cos A = \dfrac{b}{c}$

และ $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \dfrac{a}{b}$

จากที่กล่าวมานี้ จึงสรุปได้ว่า

$$\sin A = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\cos A = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\tan A = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม A}}$$

ส่วนค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ ของมุม A จะเป็นส่วนกลับของค่าฟังก์ชันทั้งสามนั้น สมการข้างต้นนี้มีประโยชน์ในการหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

5. การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จากหัวข้อที่กล่าวมาแล้ว ได้ทราบค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมบางมุมมาบ้างแล้ว และทราบด้วยไม่ว่าจะกำหนดจำนวนจริง θ (หรือมุม) ใด ๆ ที่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิตินั้นมาให้ จะหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง (หรือมุม) นั้นได้เสมอ ถ้าทราบค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง (หรือมุม) ตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ นักคณิตศาสตร์ได้สร้างตารางแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงบางจำนวนใน ช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ หรือของมุมบางมุมที่มีขนาดตั้งแต่ 0° ถึง 90° ในตารางแสดงเฉพาะค่าของฟังก์ชัน sine, tangent, cotangent และ cosine ส่วนค่าของฟังก์ชัน cosecant และ secant หาได้โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์ และโคไซน์ ดังนี้

$$\cos\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad \text{และ} \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

ตารางที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นส่วนหนึ่งจากตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

Degrees	Radians	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine		
30° 00'	.5236	.5000	.5774	1.7321	.8660	1.0472	60° 00'
10'	.5265	.5025	.5812	1.7205	.8646	1.0443	50'
20'	.5294	.5050	.5851	1.7090	.8631	1.0414	40'
30'	.5323	.5075	.5890	1.6977	.8616	1.0385	30'
40'	.5352	.5100	.5930	1.6864	.8601	1.0356	20'
50'	.5381	.5125	.5969	1.6753	.8587	1.0327	10'
31° 00'	.5411	.5150	.6009	1.6643	.8572	1.0297	59° 00'
10'	.5440	.5175	.6048	1.6534	.8557	1.0268	50'
		Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	Radians	Degrees

นอกจากจะใช้ตารางในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง (หรือมุม) แล้วยังใช้ตารางนี้หาค่าของจำนวนจริง (หรือมุม) เมื่อทราบค่าของฟังก์ชั่นตรีโกณมิติของจำนวนจริง (หรือมุม) นั้น ๆ ได้

ข้อสังเกต การใช้ตารางค่าของฟังก์ชั่นตรีโกณมิติและการคำนวณเทียบค่า ตามตัวอย่างในหัวข้อนี้ ปัจจุบันไม่นิยมใช้แล้ว เนื่องจากสามารถใช้เครื่องคิดเลขซึ่งบอกค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ละเอียดกว่าตาราง

6. กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

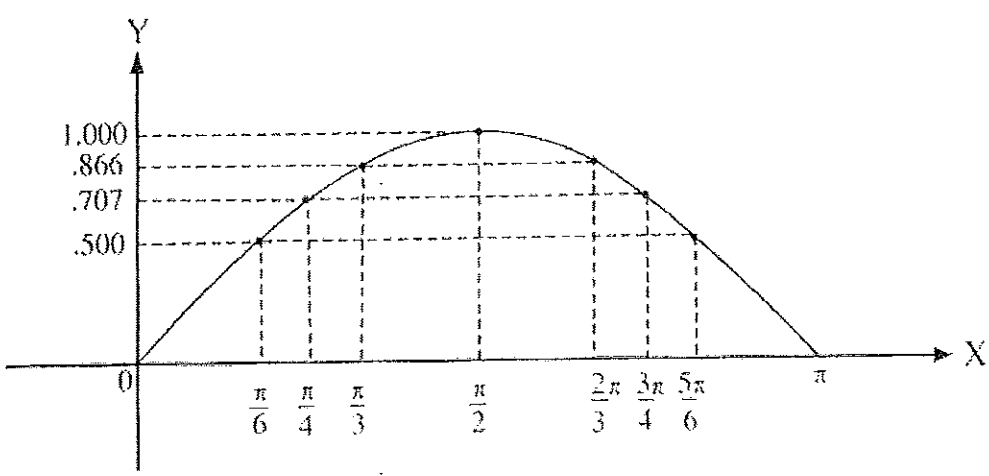
กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยเฉพาะกราฟของฟังก์ชั่นไซน์และโคไซน์เป็นกราฟที่มีความสำคัญมากทั้งในวิชาคณิตศาสตร์และในวิชาอื่น ๆ เช่น ในวิชาฟิสิกส์ในเรื่องแสง เสียง เป็นต้น ดังนั้นจึงควรศึกษาลักษณะและการเขียนกราฟของฟังก์ชันทั้งสองและฟังก์ชันอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องดังนี้

สำหรับฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ถ้า $(x, y) \in$ sine จะได้ $y = \sin x$

การเขียนกราฟของ $y = \sin x$ เขียนได้ดังนี้

กราฟของ $y = \sin x$ เมื่อ $0 \le x \le \pi$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



เนื่องจากเรนจ์ฟังก์ชันไซน์คือเซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ดังนั้น ค่าของฟังก์ชันไซน์จึงมีค่าตั้งแต่ -1 ถึง 1 ซึ่งค่าของ sin x เมื่อ x เป็นจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π จะมีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงดังแสดงในตารางต่อไปนี้

x	sin x
$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$	เพิ่มขึ้นจาก 0 ไปถึง 1
$\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$	ลดลงจาก 1 ไปถึง 0
$\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$	ลดลงจาก 0 ไปถึง -1
$\frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$	เพิ่มขึ้นจาก -1 ไปถึง 0

เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันเป็น**ฟังก์ชันที่เป็นคาบ** (periodic function) กล่าวคือ สามารถแบ่งแกน X ออกเป็น**ช่วงย่อย** (subinterval) โดยที่ความยาวของแต่ละช่วงย่อยเท่ากันและกราฟในแต่ละช่วงย่อมมีลักษณะเหมือนกัน ความยาวของช่วงย่อย ที่สั้นที่สุดที่มีสมบัติดังกล่าวเรียกว่า **คาบ** (period) ของฟังก์ชัน เช่น กราฟของ y = sin x และ y = cos x ในช่วง -2π ถึง 0 ถึง ในช่วง 0 ถึง 2π ในช่วง 2π ถึง 4π ฯลฯ เป็นช่วงที่สั้นที่สุดที่แบ่งแล้วทำให้กราฟในแต่และช่วงเหล่านั้นมีลักษณะเหมือนกัน คาบของฟังก์ชัน y = sin x และ y = cos x จึงเท่ากับ 2π

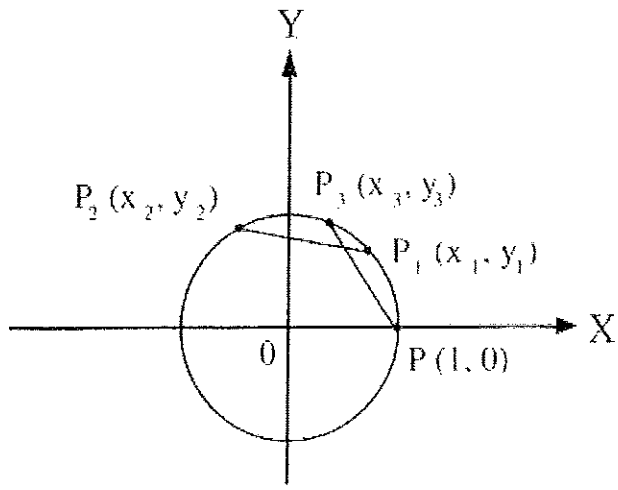
สำหรับฟังก์ชันที่เป็นคาบซึ่งมีค่าต่ำสุดและสูงสุด จะเรียกค่าที่เท่ากับครึ่งหนึ่งของค่าสูงสุดลบด้วยค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนั้นว่า แอมพลิจูด (amplitude)

นั่นคือ ถ้า a และ b เป็นค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชันที่เป็นคาบตามลำดับจะได้แอมพลิจูดของฟังก์ชันนี้เท่ากับ $\frac{1}{2}(a-b)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน y = sin x และ y = cos x มีแอมพลิจูดเป็น 1 เท่ากัน

7. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

ในหัวข้อนี้จะกล่าวฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือของมุม โดยการศึกษาว่าค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของสองจำนวนนั้นจะเป็นเท่าใด และผลที่ได้จะนำไปใช้ประโยชน์อะไรบ้าง สิ่งแรกที่จะพิจารณาคือค่าของฟังก์ชันโคไซน์ของผลต่างระหว่างจำนวนจริงสองจำนวน หรือมุมสองมุม นั่นคือพิจารณาค่าของ $\cos(\alpha-\beta)$ เมื่อ α, β เป็นจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ



บนวงกลมหนึ่งหน่วย ให้ส่วนโค้ง PP_1 ยาว β หน่วย และส่วนโค้ง PP_2 ยาว α หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง PP_1 ยาว $\alpha - \beta$ หน่วย

ให้ P_3 เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ทำให้ส่วนโค้ง PP_3 ยาวเท่ากับส่วนโค้ง P_1P_2

ดังนั้น ส่วนโค้ง PP_3 ยาว $\alpha - \beta$ หน่วย

ให้โคออร์ดิเนตของจุด P_1, P_2, P_3 เป็น $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ และ (x_3, y_3) ตามลำดับ ดังรูป

เนื่องจากส่วนโค้ง PP_3 ยาวเท่ากับส่วนโค้ง P_1P_2

ดังนั้น คอร์ด PP_3 ยาวเท่ากับกับคอร์ด P_1P_2

ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือของมุม

$$\sin A+\sin B = 2\sin\frac{(A+B)}{2}\cos\frac{(A-B)}{2}$$

$$\sin A-\sin B = 2\cos\frac{(A+B)}{2}\sin\frac{(A-B)}{2}$$

$$\cos A+\cos B = 2\cos\frac{(A+B)}{2}\cos\frac{(A-B)}{2}$$

$$\cos A-\cos B = -2\sin\frac{(A+B)}{2}\sin\frac{(A-B)}{2}$$

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B)$$

$$2\cos A\sin B = \sin(A+B)-\sin(A-B)$$

$$2\cos A\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B)$$

$$2\sin A\sin B = \cos(A-B)-\cos(A+B)$$

8. ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

การหาตัวผกผันของฟังก์ชันทำได้โดยการสลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของฟังก์ชัน และฟังก์ชัน และฟังก์ชัน 1-1 เท่านั้นที่มีตัวผกผันเป็นฟังก์ชัน

เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้น ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติจึงไม่เป็นฟังก์ชัน เช่น ฟังก์ชันไซน์มีคู่อันดับ (0, 0) $(\pi,0)$ และ $(2\pi,0)$ เป็นสมาชิก ดังนั้น คู่อันดับ (0, 0) $(0,\pi)$,$(0,2\pi)$ จึงเป็นสมาชิกของตัวผกผันของฟังก์ชันไซน์ ซึ่งแสดงว่าตัวผกผันของฟังก์ชันไซน์ไม่เป็นฟังก์ชัน แต่ถ้ากำหนดโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติให้เหมาะสมจะพบว่าตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติจะเป็นฟังก์ชัน

บทนิยาม ฟังก์ชัน arcsine คือ เซตของคู่อันดับ (x,y) โดยที่ $x=\sin y$ และ $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$

การหาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ นอกจากจะอาศัยกราฟของฟังก์ชันตามที่ได้กล่าวมาในตัวอย่างข้างต้นแล้ว ยังสามารถทำได้โดยอาศัยฟังก์ชันตรีโกณมิตินั้น ๆ เช่น การหาค่าของ arcsin x โดยที่ $-1\le x\le 1$ ก็คือการหา θ ซึ่งอยู่ในเรนจ์ของฟังก์ชัน arcsin ที่ทำให้ $\sin\theta = x$ นั่นเอง

ตัวอย่างเช่น การหาค่าของ arcsin $\frac{1}{4}$ ก็คือการหา θ ซึ่ง $-\frac{\pi}{2}\ \le\ \theta\ \le\ \frac{\pi}{2}$ ที่ทำให้ $\sin\theta=\frac{1}{4}$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ arcsin 1

วิธีทำ ให้ arcsin 1 = θ จะได้ sin θ = 1

หาค่า θ เมื่อ $-\frac{\pi}{2}\ \le\ \theta\ \le\ \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = 1$

จะพบว่า เมื่อ $-\frac{\pi}{2}\ \le\ \theta\ \le\ \frac{\pi}{2}$ จะมี $\theta=\frac{\pi}{2}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\theta = 1$

ดังนั้น arcsin 1 = $\frac{\pi}{2}$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ arcsin $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

วิธีทำ ให้ arcsin $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \theta$ จะได้ sin $\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

หาค่า θ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ และ $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

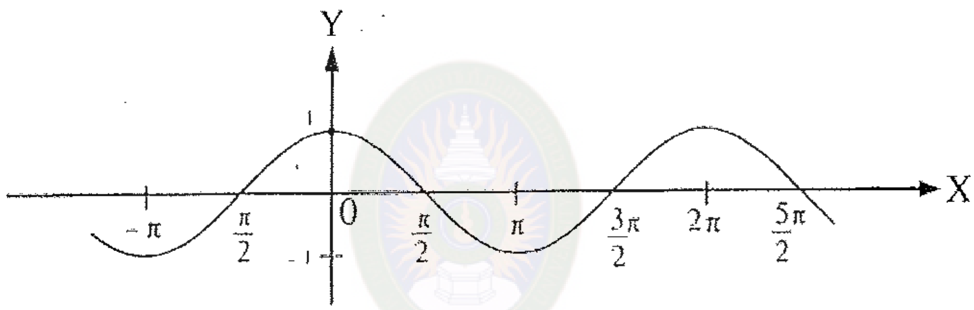
จะพบว่า เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ จะมี $\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ เพียงค่าเดียวที่

$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น arcsin $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$

ตัวผกผันของฟังก์ชันโคไซน์

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน y = cos x



เมื่อกำหนดโดเมนของ y = cos x ใหม่ โดยให้ $0 \le x \le \pi$

จะได้ฟังก์ชัน $\{(x,y)|y = \cos x, 0 \le x \le \pi\}$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 ซึ่งมีฟังก์ชันผกผันเป็น $\{(x,y)|x = \cos y, -1 \le x \le 1, 0 \le x \le \pi\}$ เรียกฟังก์ชันผกผันนี้ว่า arccosine

> **บทนิยาม** ฟังก์ชัน arccosine คือเซตของคู่อันดับ (x,y)
> โดยที่ $x = \cos y$ และ $0 \le x \le \pi$

ตัวผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์

เมื่อกำหนดโดเมนของ y = tan x ใหม่ โดยให้ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ จะได้ ฟังก์ชัน

$\left\{(x,y)\middle|y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 ซึ่งมีฟังก์ชันผกผันเป็น

$\left\{(x,y)\middle|y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right.$ และ $\left.-\infty < x < \infty\right\}$ เรียกฟังก์ชันผกผันนี้ว่า arctangent

บทนิยาม ฟังก์ชัน arctangent คือเซตของคู่อันดับ (x,y) โดยที่ $x = \tan y$ และ $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$

เมื่อ (x, y) ε arctangent จะได้ y = arctangent x หรือเขียนสั้น ๆ เป็น y = arctan x ซึ่งมีความหมายเช่นเดียวกับ x = tan y และ $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$

9. เอกลักษณ์ และสมการตรีโกณมิติ

9.1 เอกลักษณ์

พิจารณาสมการต่อไปนี้

$$\cot A = \frac{1}{\tan A}$$

$$\sin A = \cos A$$

จะเห็นว่า สมการทั้งสองเป็นสมการที่มีฟังก์ชันตรีโกณมิติปรากฏอยู่ เรียกสมการเช่นนี้ว่า **สมการตรีโกณมิติ**

สมการ $\cot A = \dfrac{1}{\tan A}$ จะเป็นจริงสำหรับทุกค่าของ A ที่ทำให้หาค่าของฟังก์ชันที่ปรากฏอยู่ในสมาการนั้นได้คือ ค่าของ cot A, tan A และ $\dfrac{1}{\tan A}$

ส่วนสมการ sin A = cos A จะเป็นจริงสำหรับบางค่าของ A ที่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชันทั้งสองเท่านั้น

เรียกสมการที่มีสมบัติเช่นสมการ $\cot A = \dfrac{1}{\tan A}$ ว่า **เอกลักษณ์**

ในเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ผ่านมาได้มีการพิสูจน์เอกลักษณ์มาบ้างแล้ว เช่น เอกลักษณ์ต่อไปนี้

มุมประกอบ (Compound Angle)

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$\cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$$

$$\cot(A-B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$

มุม 2 เท่า (Double angle)

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A$$

$$= \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$= 2\cos^2 A - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 A$$

$$= \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

$$\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2\cot A}$$

มุม 3 เท่า (Triple angle)

$$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$$

$$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$$

$$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

$$\cot 3A = \frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}$$

การพิสูจน์เอกลักษณ์เป็นการแสดงให้เห็นว่าจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของสมการเท่ากันจริง โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ การพิสูจน์เอกลักษณ์จึงช่วยให้เห็นความสัมพันธ์ต่าง ๆ ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติ และเอกลักษณ์ที่พิสูจน์แล้วสามารถนำไปอ้างอิงในการพิสูจน์เอกลักษณ์อื่น ๆ ได้

9.2 สมการตรีโกณมิติ

การแก้สมาการตรีโกณมิติทำได้ในทำนองเดียวกับการแก้สมการพีชคณิตสมการลอการิทึมหรือสมการเอกซ์โพเนนเชียล โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อหาคำตอบของสมาการ

เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ อาจจะซ้ำกันได้ ดังนั้น ในการหาคำตอบของสมการถ้าโจทย์ไม่ได้กำหนดให้ตอบอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่งแล้วคำตอบควรจะอยู่ในรูปของค่าทั่วไป

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ $\cos x = \frac{1}{2},\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $0 < x < \frac{\pi}{2}$ จะเห็นว่าค่าของ x ในช่วงนี้ที่ทำให้

$\cos x = \frac{1}{2}$ คือ $x = \frac{\pi}{3}$

ดังนั้น เซตคำตอบคือ $\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$

10. กฎของโคไซน์และไซน์

เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันของจำนวนจริงหรือของมุม สมบัติของฟังก์ชันเหล่านี้อาจนำมาใช้ในการหาความยาวของด้านและขนาดของมุมของรูปเหลี่ยมได้โดยเฉพาะรูปสามเหลี่ยม ซึ่งจะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมและฟังก์ชันตรีโกณมิติดังนี้

กฎของโคไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ ถ้า a, b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ จะได้

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos A$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos A$$

กฎของโคไซน์นี้ใช้หาความยาวของด้านหรือขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมเมื่อกำหนดความยาวของด้านบางด้านและขนาดของมุมบางมุมมาให้

กฎของไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ ถ้า a, b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ จะได้

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

11. การหาระยะทางและความสูง

ในการวัดระยะทางและความสูงของสิ่งใดก็ตาม บางครั้งจะใช้เครื่องมือ สำหรับวัดโดยตรงไม่ได้ เช่น การวัดระยะระหว่างสถานที่สองแห่งที่มีเนินเขากั้นกลางหรือความสูงของภูเขา เป็นต้น ปัญหาการวัดระยะเช่นนี้ อาจนำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ความรู้เกี่ยวกับมุมก้ม มุมเงย กฎของไซน์และโคไซน์มาช่วยในการหาได้

สรุป ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เป็นเรื่องที่มีประโยชน์และมีความสำคัญมากทั้งในวิชาคณิตศาสตร์และในวิชาอื่น ๆ เช่น ในวิชาฟิสิกส์ในเรื่องแสง เสียง เป็นต้น ดังนั้นจึงควรศึกษาลักษณะและการเขียนกราฟของฟังก์ชันทั้งสองและฟังก์ชันอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง นอกจากนั้นกฎของไซน์และโคไซน์ยังสามารถนำไปใช้วัดสิ่งต่าง ๆ ได้ เนื้อหาของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ประกอบด้วย ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ กฎของโคไซน์และไซน์ และการหาระยะทางและความสูง

การวินิจฉัยทางการเรียน

1. ความหมายของการวินิจฉัยทางการเรียน

นักการศึกษาหลายท่านให้ความหมายของการวินิจฉัยทางการเรียนไว้ดังนี้

วรรณรัตน์ วิบูลสุข (2539 : 12) ได้สรุปความหมายของการวินิจฉัยทางการเรียนคณิตศาสตร์ ว่าหมายถึงการค้นหาข้อบกพร่อง วิเคราะห์ข้อผิดพลาด แล้วรวบรวมปัญหาและสาเหตุต่างๆ รวมทั้งอุปสรรคในการเรียนคณิตศาสตร์ เพื่อนำผลการวินิจฉัยมาใช้ปรับปรุงและพัฒนาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น

สมศักดิ์ ฉันทานุรักษ์ (2529 : 61-62) ได้ให้ความหมายของการวินิจฉัยทางการเรียนไว้ว่า เป็นการค้นหาข้อบกพร่องทางการเรียนที่เป็นปัญหาหรืออุปสรรค ทำให้นักเรียนไม่ประสบความสำเร็จในการเรียน

อัมพร ม้าคนอง (2536 : 5) ได้ให้ความหมายของการวินิจฉัยทางการเรียน ไว้ว่าหมายถึง การค้นหาข้อบกพร่องทางเรียน อันเป็นสาเหตุทำให้นักเรียนเรียนไม่ได้ หรือทำให้นักเรียนไม่สามารถเรียนได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ดวงเดือน อ่อนน่วม (2533 : 33) ได้สรุปความหมายของการวินิจฉัยทางการเรียนว่า หมายถึง การวิเคราะห์หรือรวบรวมข้อมูลเพื่อให้ทราบรายละเอียดของจุดเด่น (สิ่งที่ดีอยู่แล้ว) หรือจุดด้อย(ข้อบกพร่องหรือสิ่งที่เป็นอุปสรรค) ในการเรียนของเด็ก

Hornby, Albert Sydney (2005 : 420) ได้ให้ความหมายของ การวินิจฉัยไว้ในพจนานุกรมของ Oxford ว่า การวินิจฉัยหมายถึง การค้นหาหรือการพิสูจน์เพื่อหาสาเหตุของสิ่งที่ทำให้เกิดสภาพที่ไม่ดีหรือสิ่งที่เป็นปัญหา

Jonathan L. Goldman, Project editor ; Andrew N. Sparks, senior editor(1996 : 239) ได้ให้ความหมายของการวินิจฉัยไว้ในพจนานุกรมของ Webster' new world ว่าการวินิจฉัยหมายถึง การวิเคราะห์ถึงสาเหตุของสิ่งที่เป็นปัญหา ในสภาวะใดสภาวะหนึ่ง หรือสถานการณ์ใด ๆ

จากที่นักการศึกษาได้ให้ความหมายของการวินิจฉัยทางการเรียนข้างต้น สรุปได้ว่า การวินิจฉัยทางการเรียน คือ การค้นหาข้อบกพร่องหรือข้อผิดพลาด ต่าง ๆ ที่เป็นอุปสรรคทำให้นักเรียนไม่ประสบความสำเร็จในการเรียน โดยรวบรวมปัญหามาวิเคราะห์หาสาเหตุเพื่อนำผลที่ได้มาพัฒนาการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น

2. วิธีการวินิจฉัยทางการเรียน

วิธีการวินิจฉัยทางการเรียนนั้นมีอยู่หลากหลาย ดังที่นักการศึกษาได้กล่าวไว้ดังนี้ ในการหาวิธีเพื่อวินิจฉัยการเรียนนั้น อาจต้องใช้ข้อมูลหลายด้านประกอบกัน ดังที่

พันทิพา อุทัยสุข (2523 : 5) ได้กล่าวถึงวิธีการต่าง ๆ ไว้ดังนี้

1. การสังเกตการสอน เป็นการพิจารณาดูว่า นักเรียนมีความสนใจและมีสมาธิในการเรียนหรือไม่

2. การศึกษาเด็กเป็นรายกรณี เป็นการศึกษาเรื่องทั่ว ๆ ไปของนักเรียนบางคนที่คิดว่าอาจมีปัญหา

3. การทดสอบปกติ เป็นการดูผลการเรียนที่ได้จากการสอบและดูความก้าวหน้าของนักเรียน

4. การสอบอย่างละเอียด เป็นการค้นหาข้อบกพร่องทางเรียนของนักเรียน ได้ตรงจุดจริง ๆ ว่า ส่วนใดต้องแก้ไข โดยพยายามออกข้อสอบให้ได้คำตอบอย่างชัดเจนถึงข้อบกพร่องของนักเรียน

5. การสัมภาษณ์ผู้ปกครอง เป็นการปรึกษาหารือเกี่ยวกับปัญหาต่าง ๆ ของนักเรียนทั้งด้านการเรียน และด้านอื่น ๆ

Buffie, Welch and Paige (1968 : 161-162) ได้กล่าวว่าในการวินิจฉัยนักเรียนนั้นมีกระบวนการพื้นฐานอยู่ 4 อย่าง คือ

1. สังเกตนักเรียนในขณะที่ทำงาน
2. การสัมภาษณ์นักเรียนและการพูดคุยซักถามเกี่ยวกับงานที่นักเรียนทำ
3. วิเคราะห์งานที่นักเรียนทำในแต่ละวัน
4. ใช้แบบทดสอบเพื่อการวินิจฉัย

แต่ในการที่ครูจะตัดสินอะไรไปนั้นจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องรวบรวมหลักฐานหรือข้อมูลต่าง ๆ ให้ครบถ้วนและแม่นตรง

Nitko (1996 : 284- 298) เสนอวิธีวินิจฉัยความคลาดเคลื่อนในการเรียนรู้ 6 วิธี คือ

1. การค้นหาจุดเด่นและจุดด้อยในการเรียนรู้ระดับหัวเรื่อง
2. การค้นหาความรู้หรือทักษะพื้นฐานที่จำเป็น ที่ผู้เรียนเข้าใจคลาดเคลื่อน
3. การจำแนกผู้เรียนเป็นกลุ่มรอบรู้และกลุ่มไม่รอบรู้แต่ในแต่ละจุดประสงค์การเรียนรู้
4. การระบุความคลาดเคลื่อนในการปฏิบัติของผู้เรียน
5. การวิเคราะห์โครงสร้างความรู้ของผู้เรียน
6. การวินิจฉัยความคลาดเคลื่อนในองค์ประกอบของการแก้โจทย์ปัญหา

จากที่นักการศึกษา ได้เสนอวิธีการวินิจฉัยทางการเรียนนั้น ทำให้ได้ข้อสรุปว่าผู้วิจัยควรใช้ข้อมูลหลาย ๆ ด้านมาประกอบกันดังนี้

1. การสังเกตนักเรียนจากการทำงาน และการตอบคำถาม
2. การจำแนกผู้เรียนออกเป็นกลุ่มตามความสามารถของนักเรียน ในแต่ละจุดประสงค์การเรียนรู้
3. การทดสอบ อาจแบ่งได้เป็น ทดสอบเพื่อดูความก้าวหน้าในการเรียน และการทดสอบอย่างละเอียดโดยใช้แบบทดสอบวินิจฉัย เพื่อหาข้อบกพร่องของนักเรียน
4. การสัมภาษณ์ อาจแบ่งได้เป็น การสัมภาษณ์นักเรียนโดยตรง หรือการสัมภาษณ์ผู้ปกครอง ซึ่งอาจทำให้ผู้วิจัยได้ข้อมูลด้านอื่น ๆ ของนักเรียนด้วย

3. รูปแบบของการวินิจฉัยทางการเรียน

กองการวิจัยการศึกษา (2532, หน้า 4-6 อ้างใน วชิระ ปะทะดี, 2538, หน้า 9-10) ได้กล่าวถึงรูปแบบของการวินิจฉัยทางการเรียนโดยทั่วไป สามารถทำได้ดังนี้

1. รูปแบบทั่วไป ประกอบด้วยขั้นตอนตามลำดับดังนี้

1.1 การใช้ข้อสอบแบบสำรวจ (Survey test) เป็นการวินิจฉัยโดยใช้ข้อสอบทั่วไปตามหลักสูตร โดยอาจใช้ข้อสอบวัดผลสัมฤทธิ์ (Achievement test) เพื่อดูว่าเด็กด้อยความสามารถในด้านใดบ้าง

1.2 การวินิจฉัยโดยระบุจุดบกพร่อง (Identify weakness) เป็นการวินิจฉัยโดยระบุจุดที่บกพร่อง เพื่อบ่งชี้ข้อบกพร่องของแต่ละสมรรถภาพ

1.3 การวินิจฉัยโดยระบุสาเหตุของความบกพร่อง (Diagnose the causes of weakness) เป็นการวินิจฉัยโดยระบุลักษณะของความบกพร่อง โดยใช้ข้อสอบวินิจฉัยเพื่อพิจารณาข้อบกพร่องทีละจุด ซึ่งอาจมีหลายสาเหตุ เช่น มีสาเหตุมาจากสติปัญญา ทักษะ เจตคติ และสภาพแวดล้อมเป็นต้น

1.4 การให้ความช่วยเหลือเพื่อแก้ไขข้อบกพร่อง (Development) เป็นการให้ความช่วยเหลือ เพื่อพัฒนาเด็กหรือแก้ไขข้อบกพร่องของเด็กให้ดีขึ้น

2. รูปแบบการวินิจฉัยโดยใช้ข้อสอบวินิจฉัย ประกอบด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

2.1 การวิเคราะห์งาน (Task analysis) คือการเอาเนื้อหาสาระตามหลักสูตรมาสร้างเป็นความสามารถย่อย ตามลำดับขั้นตอนการพัฒนาด้านความรู้ความสามารถเพื่อวิเคราะห์ให้ครอบคลุม เนื้อหากระบวนการผลิต

2.2 การสร้างข้อสอบวัดผลแต่ละงาน (Test item writing) การสร้างแบบทดสอบ 2 ครั้ง ครั้งแรกเป็นแบบทดสอบอัตนัยเพื่อค้นหาสาเหตุของความบกพร่องและเอาคำตอบของเด็กที่ทำผิด ๆ มาสร้างเป็นแบบทดสอบครั้งที่สองซึ่งเป็นแบบทดสอบแบบปรนัย

2.3 การนำข้อสอบไปทดลองใช้ (Operational, try-out)

2.4 การทบทวนและจัดชุดข้อสอบ (Revise, oganization) คือการวิเคราะห์สิ่งที่จะทดสอบว่าจำเป็นจริง ๆ เพียงใดและจัดชุดข้อสอบ

2.5 การนำข้อสอบวินิจฉัยไปใช้กับเด็กที่มีปัญหาการเรียน

นอกจากนี้ ดวงเดือน อ่อนน่วม (2533 : 41) ได้กล่าวว่ารูปแบบการวินิจฉัยที่ใช้ในวงการศึกษาในปัจจุบันมี 2 ประเภท ได้แก่

1. รูปแบบการฝึกความสามารถ (Ability training model) เป็นรูปแบบที่ใช้กันมากในวงการศึกษาเด็กพิเศษ (Exceptional children) จุดเน้นของรูปแบบนี้ อยู่ที่ตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับแบบการเรียนรู้ (Learning style) สิ่งที่วัด เช่นจุดเด่นและจุดด้อยในการแยกภาพ (Visual discrimination) และในการแยกเสียง (Auditory discrimination) เมื่อเสร็จสิ้นการวินิจฉัยก็จะวางแผนเพื่อเสริมจุดเด่นหรือแก้ไขจุดด้อย เครื่องมือที่ใช้ในการวินิจฉัยตามรูปแบบนี้ เช่น Illinois Test of

Psycholinguistic Abilities, Frostig's Development Test of Visual Perception และ Wechsler Intelligence Scale for Children การวินิจฉัยตามรูปแบบนี้ได้รับการวิจารณ์ว่ายังไม่มีการวิจัยใดยืนยันให้เห็นว่า การเพิ่มความสามารถในการแยกเสียงหรือภาพจะเกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและถึงแม้ว่าความสามารถ หรือกระบวนการที่วัดจะมีความสัมพันธ์ กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก็ยากที่จะทึกทักว่าข้อความแรกเป็นเหตุและข้อความหลังเป็นผล

2. รูปแบบการวิเคราะห์งาน (Task analysis model) เป็นรูปแบบที่เกี่ยวกับการสร้างลำดับขั้นของเนื้อหาวิชา ความคิดรวบยอดหรือทักษะ ซึ่งลำดับขั้นที่สร้างขึ้นสะท้อนให้เห็นหลักเหตุผลตามลักษณะของเนื้อหาวิชา ถึงแม้รูปแบบการวิเคราะห์งานจะได้รับการสนับสนุนจากงานวิจัยอยู่บ้าง แต่ก็ได้รับข้อติดังนี้

2.1 เน้นเฉพาะแต่การวิเคราะห์เนื้อหาวิชาโดยไม่คำนึงถึงตัวผู้เรียน

2.2 ลำดับขั้นของเนื้อหาอาจเหมาะกับเด็กบางคนแต่อาจไม่เหมาะกับเด็กบางคน

2.3 การวิเคราะห์เนื้อหาเพื่อให้ได้ "สิ่งที่ต้องเรียนรู้มาก่อน" ทำได้ยาก

2.4 ยังไม่มีการวัดผลเชิงปริมาณที่เชื่อถือได้ในการหาความตรง (Validity) ของแต่ละลำดับขั้น

2.5 การแก้ไขข้อบกพร่องเน้นที่เนื้อหาวิชามากกว่ากิจกรรมการสอน

จากรูปแบบของการวินิจฉัยทางการเรียนที่มีนักการศึกษาได้กล่าวมาข้างต้น ทำให้สรุปได้ว่า รูปแบบของการวินิจฉัยทางการเรียนนั้นมีตั้งแต่รูปแบบทั่วไป จนถึงรูปแบบการวินิจฉัยหรือการวิเคราะห์ ซึ่งในการเลือกใช้แต่ละรูปแบบนั้นขึ้นอยู่กับตัวผู้เรียนและวัตถุประสงค์ที่ผู้วิจัยต้องการศึกษา

4. แนวทางการวินิจฉัยทางการเรียน

การวินิจฉัยนักเรียน ก็คือการค้นหาเพื่อดูขอบเขตและธรรมชาติของความผิดพลาดและสาเหตุที่เป็นไปได้ของความผิดพลาด ซึ่ง Aslock (1982 : 13-14) ได้เสนอแนวทางในการวินิจฉัยกับเด็กที่มีความยากลำบากในการคำนวณ ดังนี้

1. ต้องยอมรับ การวินิจฉัยเป็นกระบวนการส่วนบุคคล ครูจะต้องให้ความมั่นใจแก่นักเรียนว่า ครูสนใจและยอมรับในตัวนักเรียน และตั้งใจจะช่วยเหลือนักเรียน สามารถยอมรับคำตอบที่ผิด ๆ ของนักเรียนได้

2. รวบรวมข้อมูล ในการกระทำวินิจฉัย ครูจะต้องแยกบทบาทของการรวบรวมข้อมูลกับบทบาทของการสอน การวินิจฉัยเกี่ยวข้องกับการรวบรวมข้อมูลที่เป็นประโยชน์ให้มากที่สุดและตัดสินบนพื้นฐานของข้อมูลที่รวบรวมได้

3. ละเอียด รอบคอบ ครูควรมีการวินิจฉัยอย่างสม่ำเสมอ แม้กระทั่งที่มีการสอนซ่อมเสริมก็ตาม

4. มองหารูปแบบ ข้อมูลควรถูกประเมินในลักษณะของรูปแบบ ไม่ใช่แยกพิจารณา เพราะในการพบข้อบกพร่องนั้น ต้องมีลักษณะที่เป็นแบบของความผิดพลาดที่กระทำอย่างต่อเนื่อง

5. เทคนิคในการวินิจฉัยทางการเรียน

ดวงเดือน อ่อนน่วม (2533 : 33-34) ได้แบ่งเทคนิคในการวินิจฉัยออกเป็น 2 แบบ ดัง ต่อไปนี้

1. การวินิจฉัยอย่างเป็นทางการ (Formal technique) เป็นการวินิจฉัยโดยใช้แบบสอบมาตรฐาน ผู้ใช้แบบทดสอบจะต้องรู้จักเลือกแบบสอบมาใช้ให้ตรงตามจุดประสงค์

2. การวินิจฉัยอย่างไม่เป็นทางการ (Informal technique) เป็นการวินิจฉัยเพื่อหาข้อมูลเพื่อเติมการจากใช้แบบสอบมาตรฐาน วิธีการที่ใช้เช่นการสังเกต เพื่อให้ทราบความสนใจหรือทัศนคติในการเรียน การตรวจผลงาน การศึกษาประวัติจากบันทึกโรงเรียน

6. ระดับการวินิจฉัย

ดวงเดือน อ่อนน่วม (2533 : 34-39) ได้แบ่งระดับของการวินิจฉัยออกเป็น 3 ระดับ ซึ่งสอดคล้องกับ วีณา วโรตมะวิชญ (2541 : 14-15) มีรายละเอียด ดังนี้

1. ระดับทั่วไป (General level) เป็นระดับที่สำรวจความสามารถทั่ว ๆ ไปของนักเรียน ซึ่งแบบสอบที่ใช้วัดในระดับนี้ ถ้าเป็นในต่างประเทศมักใช้แบบทดสอบมาตรฐาน แต่ในเมืองไทยมักใช้แบบวัดผลสัมฤทธิ์ปลายภาคเรียน หรือรายปี ทั้งนี้ในการตรวจให้คะแนนไม่ได้ดูที่คะแนนรวม แต่จะพิจารณาคะแนนรายสมรรถภาพหรือคะแนนในแต่ละหมวดการเรียนรู้ (Domain) หรือหมวดการเรียนรู้ย่อย (Subdomain) ว่านักเรียนไม่บรรลุผลการเรียนในหมวดการเรียนรู้ใดบ้าง ซึ่งการวินิจฉัยในระดับนี้ กรองกาญจน์ อรุณรัตน์ (2534 : 22-23) ได้เสนอวิธีการเก็บข้อมูลโดยหาจาก

1.1 แบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ เป็นการทดสอบผลสัมฤทธิ์ในด้านทักษะและเนื้อหาทางวิชาการ โดยเปรียบเทียบผลการสอบของนักเรียนทั้งชั้นกับมาตรฐานของท้องถิ่น หรือมาตรฐานของชาติ นับเป็นการช่วยครูให้ประเมินผลงานของเด็กทั้งกลุ่มและรายบุคคล

1.2 แบบทดสอบความสามารถแบบเป็นกลุ่ม เป็นการสำรวจโดยอาศัยผลจากการทดสอบผลสัมฤทธิ์เป็นสิ่งที่มีประโยชน์ เพราะคะแนนของการทดสอบความสามารถทางสมองของทั้งกลุ่ม สามารถทำให้ครูประเมินระดับที่จะคะเนได้อย่างหยาบ ๆ ว่าเด็กกลุ่มนั้นอยู่ในระดับที่คาดหวังอะไรได้แค่ไหน

1.3 ระเบียนสะสม รายละเอียดเพิ่มเติมเกี่ยวกับตัวเด็กด้านต่าง ๆ เช่น สุขภาพทั่วไป สภาพทางบ้าน ประวัติทางโรงเรียน ฯลฯ จะช่วยให้เห็นภาพพจน์ที่กว้างขวางและสามารถเข้าใจเด็กได้มากขึ้น ไม่ว่าจะเป็นรายบุคคลหรือทั้งกลุ่ม

2. ระดับเฉพาะ (Specific level) เป็นระดับที่นิยมใช้หลังจากการใช้แบบสอบถามเพื่อการวินิจฉัยทั่วไป เพื่อต้องการทราบว่านักเรียนมีความบกพร่องในเรื่องใด ณ จุดใด เป็นการวัดความสามารถเฉพาะเจาะจง เช่น การบวก ก็จะแตกย่อยเป็นบวก จำนวนเต็ม บวกเศษส่วน เป็นต้นแบบสอบที่ใช้วัดระดับนี้คือ แบบสอบวินิจฉัย ในต่างประเทศแบบสอบประเภทนี้ให้เลือกใช้มากมาย แต่ในประเทศไทยยังไม่มี

3. ระดับละเอียด (Intensive level) เป็นการวินิจฉัยอย่างละเอียด ลึกซึ้ง เป็นการหาข้อมูลหลาย ๆ ด้าน หลาย ๆ แห่ง ทั้งนี้จะไม่ใช้แบบทดสอบเพียงอย่างเดียว การหาข้อมูลอาจใช้วิธีการสังเกต การสัมภาษณ์ แหล่งข้อมูลอาจมาจากผู้ปกครอง ครูผู้สอน เพื่อนสนิท ผู้วินิจฉัยอาจประกอบด้วยผู้เชี่ยวชาญ นักจิตวิทยา หรือครูแนะแนว และนอกจากนี้ กรองกาญจน์ อรุณรัตน์ (2534 : 24) ได้กล่าวเพิ่มเติมว่าการวินิจฉัยระดับนี้เป็นระดับที่มักสงวนไว้สำหรับนักเรียนที่เรียนอ่อนมากๆ หรือส่อแววที่เป็นอุปสรรคต่อการเรียนอยู่อย่างสลับซับซ้อน ซึ่งต้องทำการศึกษาเป็นรายบุคคลอย่างสมบูรณ์

กล่าวได้ว่าก่อนการดำเนินการวินิจฉัยทางการเรียนนั้น ผู้วิจัยต้องทำความเข้าใจและศึกษาขั้นตอนในการวินิจฉัยให้ละเอียด โดยเริ่มตั้งแต่ความหมายของการวินิจฉัย วิธีการที่ใช้ในการวินิจฉัยทางการเรียนซึ่งผู้วิจัยควรใช้ข้อมูลหลาย ๆ ด้านมาประกอบกัน เช่นการสังเกตนักเรียน, การจำแนกผู้เรียนออกเป็นกลุ่มตามความสามารถของนักเรียน การทดสอบ และการสัมภาษณ์ รวมไปถึงรูปแบบของการวินิจฉัยทางการเรียนว่าในเรื่องที่ต้องการศึกษาจะใช้รูปแบบทั่วไป หรือแบบวินิจฉัย นอกจากนี้ผู้วิจัยควรศึกษาแนวทางการวินิจฉัยทางการเรียน เทคนิคในการวินิจฉัยทางการเรียน และระดับการวินิจฉัยทางการเรียนเพื่อเป็นแนวทางในการดำเนินการวินิจฉัยทางการเรียนเพื่อให้ได้ข้อมูลที่ใกล้เคียงกับสภาพปัญหาที่เกิดกับตัวผู้เรียนให้มากที่สุด

สรุป การวินิจฉัยทางการเรียนเป็นการค้นหาข้อบกพร่องหรือข้อผิดพลาดต่างๆที่เป็นอุปสรรคทำให้นักเรียนไม่ประสบความสำเร็จในการเรียน โดยรวมปัญหามาวิเคราะห์หาสาเหตุเพื่อนำผลที่ได้มาพัฒนาการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น วิธีวินิจฉัยทางการเรียน ทำได้หลายวิธี เช่น การสังเกต การศึกษาเด็กเป็นรายกรณี การทดสอบปกติ การสัมภาษณ์ผู้ปกครอง หรือนักเรียน การทดสอบ และ การวินิจฉัยจากแบบฝึกหัด แนวทางในการวินิจฉัย จะต้องยอมรับการวินิจฉัย มีความละเอียด รอบคอบ มองหารูปแบบ ซึ่งอาจวินิจฉัยอย่างเป็นทางการหรือไม่เป็นทางการก็ได้ ดังนั้นก่อนการดำเนินการวินิจฉัยทางการเรียนนั้น ผู้วิจัยต้องทำความเข้าใจและศึกษา

ขั้นตอนในการวินิจฉัยให้ละเอียด โดยเริ่มตั้งแต่ความหมายของการวินิจฉัย วิธีการที่ใช้ในการวินิจฉัยทางการเรียนซึ่งผู้วิจัยควรใช้ข้อมูลหลาย ๆ ด้านมาประกอบกัน เช่นการสังเกตนักเรียน, การจำแนกผู้เรียนออกเป็นกลุ่มตามความสามารถของนักเรียน การทดสอบ และการสัมภาษณ์ รวมไปถึงรูปแบบของการวินิจฉัยทางการเรียนว่าในเรื่องที่ต้องการศึกษาจะใช้รูปแบบทั่วไป หรือแบบวินิจฉัย นอกจากนี้ผู้วิจัยควรศึกษาแนวทางการวินิจฉัยทางการเรียน เทคนิคในการวินิจฉัยทางการเรียน และระดับการวินิจฉัยทางการเรียนเพื่อเป็นแนวทางในการดำเนินการวินิจฉัยทางการเรียน เพื่อให้ได้ข้อมูลที่ใกล้เคียงกับสภาพปัญหาที่เกิดกับตัวผู้เรียนให้มากที่สุด

ข้อบกพร่องทางการเรียน

1. ความหมายของข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์

จากพจนานุกรมไทยฉบับต่าง ๆ เช่น ฉบับราชบัณฑิตยสถาน ฉบับมหาวิทยาลัยและฉบับเฉลิมพระเกียรติ ให้ความหมายของข้อบกพร่องไว้ว่า ข้อบกพร่อง หมายถึง ไม่ครบสมบูรณ์ หย่อนความสามารถ ขาดไป น้อยไป ไม่เต็มที่ ผิดพลาดไม่ถูกต้องทั้งหมดและพจนานุกรมไทยฉบับต่าง ๆ ที่กล่าวมาได้ให้ความหมายของข้อผิดพลาดไว้ว่า ข้อผิดพลาดหรือความผิดพลาด หมายถึง ไม่ถูกต้อง แสดงว่า ข้อผิดพลาดเป็นลักษณะของข้อบกพร่องชนิดหนึ่ง หรือเป็นส่วนหนึ่งของข้อบกพร่อง นอกจากนี้ยังมีนักการศึกษาหลายท่านให้ความหมายของข้อบกพร่องทางการเรียนไว้ดังนี้

สมศักดิ์ ฉันทานุรักษ์ (2529 : 7) ได้ให้ความหมายของข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ไว้ว่า ข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ หมายถึงข้อผิดพลาดที่เป็นปัญหาหรืออุปสรรคที่ทำให้การเรียนคณิตศาสตร์ไม่ประสบผลสำเร็จ

ดารณี คำแหง (2533 : 13) ได้ให้ความหมายของข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ไว้ว่า ข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ หมายถึง ข้อผิดพลาดหรือสาเหตุที่เป็นปัญหาหรืออุปสรรคที่ทำให้นักเรียนไม่ประสบผลสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์ หรือไม่สามารถเรียนคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

วรรณรัตน์ วิบูลสุข (2539 : 7) ได้สรุปความหมายของข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ ไว้ว่า ข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ หมายถึง ข้อผิดพลาดหรือสิ่งที่เป็นปัญหาและอุปสรรคต่อการเรียนคณิตศาสตร์ ทำให้ผลการเรียนไม่บรรลุตามวัตถุประสงค์

Jonathan L. Goldman, Project editor ; Andrew N. Sparks, senior editor.(1996 : 226) ได้ให้ความหมายของข้อบกพร่องไว้ในพจนานุกรมของ Webster' new world ว่าข้อบกพร่อง หมายถึง ส่วนประกอบหรือลักษณะของผลรวมมีน้อยกว่าสิ่งที่ต้องการ

Hornby, Albert Sydney. (2005 : 401) ได้ให้ความหมายของข้อบกพร่องไว้ในพจนานุกรมของ Oxford ว่า ข้อบกพร่องหมายถึง ลักษณะของสิ่งที่ไม่มี หรือการขาดหายของสิ่งที่จำเป็น

จากที่นักการศึกษาได้ให้ความหมายของข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ข้างต้น สรุปได้ว่า ข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ หมายถึง ข้อผิดพลาดที่เป็นปัญหาหรืออุปสรรคที่เป็นส่วนทำให้การเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนไม่ประสบผลสำเร็จ

2. ความสำคัญของข้อบกพร่องทางการเรียน

Chai and Ang (1987 : 189 - 198) ได้กล่าวถึง ความสำคัญของการหาปัญหาหรือข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ว่าในการสอนคณิตศาสตร์การวิเคราะห์ความผิดพลาดเป็นสิ่งสำคัญที่ทำให้การเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพ และการศึกษาหาความผิดพลาด จะทำให้จัดหาข้อมูลซึ่งเกี่ยวข้องกับการคิดของเด็กเกี่ยวกับปัญหาทางคณิตศาสตร์และกระบวนการที่ใช้ในการแก้ปัญหา ข้อมูลเหล่านี้มีความหมายมากใน การสอน ซึ่งจะต้องมีการแนะแนวทางในการช่วยให้นักเรียนหลีกเลี่ยงปัญหาและสามารถอธิบายได้ว่า เพราะสาเหตุใดนักเรียนจึงไม่มีพัฒนาการด้านความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ซึ่งนักวิจัยได้ยืนยันว่าเมื่อความผิดพลาดของนักเรียนได้แสดงออกมา ทำให้เห็นว่าการเรียนรู้กำลังจะเริ่มขึ้นและสามารถทำให้มั่นคงได้ในภายหลัง และจากการศึกษาข้อบกพร่องจากเอกสารและงานวิจัยต่าง ๆ พบว่านักเรียนที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์นั้นมีตั้งแต่นักเรียนที่เรียนอ่อน ปานกลาง จนถึงนักเรียนที่เรียนเก่ง ซึ่งนักเรียนทั้ง 3 กลุ่มที่กล่าวมานั้นมีลักษณะดังนี้

นักเรียนที่เรียนเก่งนั้น ยุพิน พิพิธกุล (2530 : 232-233) ได้กล่าวว่ามักจะได้คะแนนที่สูง มีความจำยอดเยี่ยม เรียนรู้ได้เร็ว เรียนด้วยความสนุกสนาน มักจะถามครูเสมอว่าทำไม เพราะเหตุใด มองเห็นความสัมพันธ์ระว่างส่วนต่าง ๆ ที่แตกต่างกัน รู้จักเปรียบเทียบ แยกแยะ สังเกตรูปแบบ และหาข้อสรุปได้แต่อาจมีพฤติกรรมที่แสดงออกก้าวร้าว สร้างปัญหารบกวนครู ไม่ทำแบบฝึกหัด เพราะเกิดความคับข้องใจ เบื่องานประจำ ที่ต้องทำซ้ำ ๆ เพราะการทำอะไรง่าย ๆ ซ้ำซากก็จะเบื่อ นอกจากนี้คณะกรรมการกลุ่มผลิตชุดวิชาการสอนคณิตศาสตร์(2539 : 448) ได้กล่าวเพิ่มเติมว่า นักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางด้านคณิตศาสตร์นี้ เป็นพวกที่ถูกหลงลืมมากที่สุด เพราะเป็นผู้ที่ไม่ก่อกวนหรือก่อปัญหาให้แก่ครู โดยมักจะสังเกตได้จากลักษณะดังนี้ มีความเข้าใจในสิ่งที่เป็นนามธรรมและมโนธรรมทางคณิตศาสตร์เป็นอย่างดี สามารถที่จะ ถ่ายโยงสิ่งที่ได้เรียนไปแล้วให้

เข้ากับสถานการณ์ใหม่ สามารถแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนได้ และมีระดับ I.Q. 120 หรือสูงกว่า

นักเรียนที่เรียนปานกลางนั้น ยุพิน พิพิธกุล (2530 : 244) ได้กล่าวว่าเป็นกลุ่มที่ไม่ค่อยสร้างปัญหาใด ๆ ให้ครูนัก เพราะเขาจะเรียนไปได้เรื่อย ๆ ไม่แสดงความเด่นมาก หรือแสดงความด้อยออกมาจนเห็นได้ชัดเจน ซึ่งลักษณะของนักเรียนที่เรียนปานกลาง มีดังนี้ นักเรียนกลุ่มนี้มักจะเรียนไปเรื่อย ๆ ครูให้ทำอะไรก็ทำตามโดยไม่มีข้อโต้แย้ง เรียนตามสบาย มักจะ พึงพอใจ เมื่อได้คะแนนสอบเกินกว่าครึ่ง ไม่สร้างปัญหาในด้านความประพฤติและไม่ชอบซักถามหรือตอบปัญหา นอกจากครูถามจะตอบ จะรับฟังอยู่เงียบ ๆ เรียนเข้าใจหรือไม่เข้าใจก็ไม่แสดงออก ไม่ค่อยแสดงความกระตือรือร้น

ในส่วนของ นักเรียนที่เรียนอ่อนนั้น ยุพิน พิพิธกุล (2530 : 244) ได้กล่าวว่า มักจะมีเจตคติในทางลบต่อต่อวิชาคณิตศาสตร์ เขามักจะไม่เข้าใจ และไม่สามารถทำคณิตศาสตร์ได้ มักจะคิดว่าตนเองเป็นผู้ที่ล้มเหลวเสมอ ไม่ชอบเข้าชั้นเรียน ไม่ยอมทำงาน นักเรียนที่เรียนอ่อนบางคนเกิดจากสิ่งแวดล้อมทางบ้าน บางทีมารดาไม่มีความรู้ทางคณิตศาสตร์ เมื่อลูกถามก็ตอบไม่ได้หรือบางทีก็ให้ลูกช่วยประกอบอาชีพ สิ่งเหล่านี้ทำให้นักเรียนเบื่อหน่ายการเรียนเพิ่มขึ้น ซึ่งมักจะอ่อนในด้านการใช้ภาษา สัญลักษณ์ การอ่าน การฟัง ไม่เกิดมโนมติในขณะที่เรียน มองไม่ออกในเรื่องที่เป็นนามธรรม ไม่รู้จักสรุป ตลอดจนไม่รู้จักเรียงลำดับความคิดและวิเคราะห์ นอกจากนี้คณะกรรมการกลุ่มผลิตชุดวิชาการสอนคณิตศาสตร์ (2539 : 435) ได้อธิบายเพิ่มเติมว่า เป็นกลุ่มที่มี I.Q. อยู่ระหว่าง 75 ถึง 90 และคะแนนของผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์จะต่ำกว่าเปอร์เซ็นไทล์ที่ 30 มีข้อบกพร่องด้านสุขภาพ เช่นสายตาไม่ปกติ มีปัญหาทางด้านการฟังและมีข้อบกพร่องทางด้านทักษะการใช้มือ และมีวุฒิภาวะค่อนข้างต่ำทั้งทางด้านอารมณ์และสังคม

มีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวว่า มักพบนักเรียนที่เรียนอ่อนมีข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์มากกว่านักเรียนในกลุ่มปานกลางและกลุ่มเก่ง ซึ่งลักษณะและการแสดงออกจะแตกต่างไปจากนักเรียนปกติ โดยครูผู้สอนสามารถสังเกตพฤติกรรมของนักเรียนได้ ดังที่ ยุพิน พิพิธกุล (2523 : 480-481) กล่าวถึง ลักษณะนักเรียนที่บกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ไว้ว่า นักเรียนที่บกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์มักจะมีเจตคติ ในทางลบต่อวิชาคณิตศาสตร์ใช้คำถามที่ไม่เข้าท่า ไม่ยอมเข้าชั้นเรียน สิ่งแวดล้อมทางบ้านของนักเรียนไม่ดีและมักจะมีปัญหาในด้านการใช้ภาษา สัญลักษณ์ ตลอดจนการอ่านและการฟัง ซึ่งสอดคล้องกับ สาคร บุญดาว (2537 : 136) ที่ได้กล่าวว่า นักเรียนที่บกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์จะมีพัฒนาการทางความคิดไม่ดี ระดับการเรียนรู้ต่ำ ขาดทักษะทางภาษา ซึ่งไม่สามารถตีความในภาษาได้ ไม่เข้าใจโครงสร้างในเนื้อหาคณิตศาสตร์ และขาดแรงจูงใจ

จากที่นักการศึกษาได้ให้ความหมายของลักษณะนักเรียนที่บกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ ซึ่งมีความสอดคล้องกับลักษณะของนักเรียนที่เรียนอ่อน ดังข้อมูลที่ได้นำเสนอข้างต้น ซึ่งสรุปได้ว่านักเรียนที่มีความบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ จะมีเจตคติในทางลบต่อวิชาคณิตศาสตร์ไม่ยอมเข้าชั้นเรียนหรือถ้าอยู่ในชั้นเรียนจะไม่สนใจ และไม่ให้ความร่วมมือในการจัดการเรียนรู้ ขาดทักษะทางด้านการฟัง พูด อ่านและเขียน มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่ไม่ผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำ

4.3 ลักษณะของข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์

ในการศึกษาลักษณะของข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์นั้นเป็นสิ่งจำเป็น เพราะหลังจากที่ได้ข้อบกพร่องจากนักเรียนแล้ว ต้องนำข้อบกพร่องดังกล่าวมาจำแนก วิเคราะห์เพื่อหาลักษณะของข้อบกพร่อง เพื่อนำไปสู่การหาหนทางในการแก้ปัญหาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ ดังที่มีนักการศึกษาหลายท่านได้เสนอลักษณะของข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

Nitsa Movshovitz-Hadar and other (1987 : 17 - 18) ได้วิเคราะห์รูปแบบของข้อบกพร่องทางการเรียน โดยได้ศึกษาตามแนวความคิดของ Radatz วิเคราะห์ข้อบกพร่องของนักเรียนในวิชาพีชคณิตและจัดกลุ่มของข้อบกพร่อง โดยสรุปลักษณะของข้อบกพร่องไว้ 6 ด้าน ดังนี้

1. การใช้ข้อมูลผิด (Misused data) คือข้อบกพร่องจากการที่นักเรียนนำข้อมูลที่โจทย์ให้มาไปใช้ผิด ซึ่งการนำข้อมูลมาใช้ผิดนี้อาจจะอยู่ในตอนเริ่มต้นหรือภายหลังจากที่ได้นำข้อมูลมาแก้ปัญหาแล้ว ลักษณะที่เป็นองค์ประกอบที่สำคัญในการใช้ข้อมูลผิดคือนักเรียนไม่ได้ใช้ข้อมูลที่กำหนดให้ แต่ใช้ข้อมูลอื่นแทน ทำผิดคำสั่ง ลอกโจทย์ผิด

2. ข้อผิดพลาดในการตีความ (Misinterpreted language) ตีความจากประโยคภาษาเป็นประโยคคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้อง ไม่เข้าใจในความหมายของสัญลักษณ์ที่เขียน

3. การอ้างอิงวิธีการหาเหตุผลที่ไม่สมบูรณ์ (Logically invalid inference)

4. บิดเบือนทฤษฎี กฎ สูตร และนิยาม (Distorted theorem of definition)

5. บกพร่องในการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา (Unverified solution)

6. บกพร่องในการใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ (Technical error)

Casay (1988 : 10-11) ได้สรุปลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียน โดยขยายทฤษฎีของ Newman ในการหาสาเหตุที่ผิด และแบ่งระดับความผิดพลาดที่นักเรียนจะบกพร่องไว้ 9 ด้าน ดังนี้

1. รูปแบบของคำถาม

2. การอ่านคำถาม

3. ความเข้าใจในคำถาม

4. กลยุทธ์ในการเลือกใช้ความรู้

5. ทักษะการเลือกใช้ความรู้

6. ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้

7. การเสนอคำตอบ

8. ความสามารถซึ่งไม่สามารถระบุสาเหตุที่แน่นอนได้เนื่องจากขาดความระมัดระวัง

9. ความผิดพลาดซึ่งครูจะทราบได้จากการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียน

อัมพร ม้าคนอง (2536 : 23-24) ได้สรุปลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนไว้ ดังนี้

1. ด้านการตีความจากโจทย์ มีส่วนประกอบของข้อบกพร่อง ดังนี้

1.1 แปลความหมายจากประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ไม่ถูกต้อง

1.2 นำข้อมูลมาใช้ผิด

2. ด้านการใช้ทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยาม และสมบัติ มีส่วนประกอบของข้อบกพร่อง ดังนี้

2.1 จำทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยาม และสมบัติผิด

2.2 ขาดความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยาม และสมบัติ

2.3 ขาดทักษะในการเลือกทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยาม และสมบัติที่เหมาะสมมาใช้

2.4 ประยุกต์ใช้ข้อมูลกับทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยาม และสมบัติไม่ถูกต้อง

3. ด้านการคิดคำนวณ มีส่วนประกอบของข้อบกพร่อง ดังนี้

3.1 ขาดความเข้าใจในหลักเลขคณิตเบื้องต้น

3.2 ขาดทักษะในหลักพีชคณิตเบื้องต้นในการแก้สมการและอสมการ

3.3 ทำผิดขั้นตอนที่ถูกต้องในการคำนวณ

3.4 ขาดความระมัดระวังในการคิดคำนวณ

3.5 สรุปผลไม่ถูกต้องหรือสรุปผลไม่ครบทุกกรณี

ลักษณะของข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่นักการศึกษาได้กล่าวมาข้างต้น มีหลายลักษณะ ซึ่งนักการศึกษาได้วิเคราะห์ในมุมมองที่แตกต่างกัน ซึ่งแนวทางในการนำไปใช้ย่อมแตกต่างกันด้วย ซึ่งผู้วิจัยได้ศึกษาลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ ของอัมพร ม้าคนอง มาเป็นแนวทางในการสร้างลักษณะของข้อบกพร่อง ของนักเรียน เพื่อจำแนกข้อบกพร่องที่เกิดขึ้นกับตัวนักเรียน

สรุป ข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ หมายถึง ข้อผิดพลาดที่เป็นปัญหาหรืออุปสรรค ที่มีส่วนทำให้การเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนไม่ประสบผลสำเร็จ การศึกษาข้อบกพร่องทาง การเรียนคณิตศาสตร์จะทำให้การเรียนการสอนมีประสิทธิภาพ ลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียน คณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้ คือ การตีความจากโจทย์ การใช้ทฤษฎีบท สูตร นิยาม และสมบัติ การคิด คำนวณ เป็นต้น

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. งานวิจัยในประเทศ

อัมพร ม้าคนอง (2536 : 64) ได้ทำการวิจัยเรื่องการวินิจฉัยข้อผิดพลาดทางการเรียน คณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กลุ่มตัวอย่าง ประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5/3 จำนวน 21 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย แบบฝึกหัดในหนังสือเรียน และแบบฝึกหัดประจำบท โจทย์ประยุกต์ และแบบทดสอบย่อยประจำ บทที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยเครื่องมือทั้งหมดเป็นโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ชนิดความเรียง ให้แสดงวิธี ทำในการแก้ปัญหา ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีข้อผิดพลาดด้านการใช้ทฤษฎีบท สูตร กฎ และ นิยามและสมบัติมากที่สุด รองลงมาคือด้านการคิดคำนวณ และการด้านการตีความ โจทย์ตามลำดับ ความถี่ของข้อผิดพลาดในแต่ละส่วนประกอบของแต่ละด้าน มีดังนี้ ด้านการตีความ โจทย์นักเรียน มีข้อผิดพลาดในส่วน การนำข้อมูลมาใช้ผิด มากที่สุด รองลงมา คือ แปลความหมายจากประโยค ภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ไม่ถูกต้อง ด้านการใช้ทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยาม และสมบัติ นักเรียนมี ข้อผิดพลาดในส่วนขาดความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยาม และสมบัติ มากที่สุด รองลงมาคือ ประยุกต์ใช้ข้อมูลกับทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยาม และสมบัติไม่ถูกต้อง จำทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยาม และสมบัติ ผิด และขาดทักษะในการเลือกทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยาม และสมบัติ ที่ เหมาะสมมาใช้ ตามลำดับ ด้านการคิดคำนวณ นักเรียนมีข้อผิดพลาดในส่วน สรุปผลไม่ถูกต้องหรือ สรุปผลไม่ครบทุกรณี มากที่สุด รองลงมาคือ ขาดความระมัดระวังในการคิดคำนวณ ขาดทักษะใน หลักพีชคณิตเบื้องต้นในการแก้สมการและอสมการทำผิดขั้นตอนที่ถูกต้องในการคำนวณ และขาด ความเข้าใจในหลักเลขคณิตเบื้องต้นตามลำดับ

สุมารี เวียงรัตน์ (2541 : 65) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การวินิจฉัยและแก้ไขข้อบกพร่องทาง การเรียนเรื่องสมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนบ้านตระแสง จังหวัดสุรินทร์ ผลการวิจัยขั้นวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียน ปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มี ข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องสมการทุกคน เมื่อเทียบเกณฑ์ร้อยละ 60 นักเรียนจำ เป็นต้องได้รับ

การแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนในจุดประสงค์ที่ 1 จำนวน 32 คน คิดเป็นร้อยละ 69.57 จุดประสงค์ที่ 2 จำนวน 26 คน คิดเป็นร้อยละ 56.52 จุดประสงค์ที่ 3 จำนวน 2 คน คิดเป็นร้อยละ 4.35 จุดประสงค์ที่ 4 จำนวน 3 คน คิดเป็นร้อยละ 6.52 จุดประสงค์ที่ 5 จำนวน 30 คน คิดเป็นร้อยละ 65.22 จุดประสงค์ที่ 6 จำนวน 12 คน คิดเป็นร้อยละ 26.09 จุดประสงค์ที่ 7 จำนวน 19 คน คิดเป็นร้อยละ 41.30 จุดประสงค์ที่ 8 จำนวน 45 คน คิดเป็นร้อยละ 97.83 จุดประสงค์ที่ 9 จำนวน 41 คน คิดเป็นร้อยละ 89.13 จุดประสงค์ที่ 10 จำนวน 41 คน คิดเป็น ร้อยละ 89.13 และขั้นแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนปรากฏว่านักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษา ปีที่ 2 ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมด้วยบทเรียนสำเร็จรูปมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น อย่างมีนัยสำคัญ ที่ระดับ .05 เมื่อพิจารณาเป็นรายจุดประสงค์เทียบเกณฑ์ร้อยละ 60 ปรากฏว่านักเรียนไม่ผ่านจุดประสงค์ที่ 1 จำนวน 9 คน คิดเป็นร้อยละ 19.56 จุดประสงค์ที่ 2 จำนวน 9 คน คิดเป็นร้อยละ 19.56 จุดประสงค์ที่ 3 จำนวน 4 คน คิดเป็นร้อยละ 8.69 จุดประสงค์ที่ 4 จำนวน 22 คน คิดเป็นร้อยละ 47.82 จุดประสงค์ที่ 5 จำนวน 26 คน คิดเป็นร้อยละ 56.52 จุดประสงค์ที่ 6 จำนวน 11 คน คิดเป็นร้อยละ 23.91 จุดประสงค์ที่ 7 จำนวน 7 คน คิดเป็นร้อยละ 15.21 จุดประสงค์ที่ 8 จำนวน 9 คน คิดเป็นร้อยละ 19.56 จุดประสงค์ที่ 9 จำนวน 15 คน คิดเป็นร้อยละ32.60 จุดประสงค์ที่ 10 จำนวน 11 คน คิดเป็นร้อยละ 23.91 จึงสรุปได้ว่าการใช้บทเรียนสำเร็จรูปในการสอนซ่อมเสริม แม้จะได้ผลในภาพรวม แต่ยังไม่ได้ผลเต็มที่ ครูจะต้องหาทางช่วยเหลือโดยการสอนซ่อมเสริมเพิ่มเติมนักเรียนที่ยังไม่ผ่านจุดประสง

เมตตา มาเวียง (2544 : 60 - 61) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การศึกษาข้อบกพร่องในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เรื่องสมบัติของจำนวนนับ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัย ขอนแก่น กลุ่มตัวอย่างคือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ปีการศึกษา 2544 จำนวน 234 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยคือ แบบฝึกหัดวัดความบกพร่องแบบอัตนัยมีข้อคำถามจำนวน 6 ข้อ ซึ่งปรับปรุงมาจากลักษณะข้อบกพร่องของทัศนีย์ ชื่นยง และผู้วิจัย และแบบสัมภาษณ์นักเรียนที่มีข้อบกพร่องที่ไม่แสดงวิธีคิดคำตอบ นำลักษณะของนักเรียนมาแยกความถี่ หาค่าร้อยละแล้วนำเสนอในลักษณะตารางและรูปความเรียง ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีข้อบกพร่องในแต่ละลักษณะต่อความถี่ของนักเรียนที่บกพร่อง แยกเป็นลักษณะข้อบกพร่องย่อยได้ 12 ลักษณะ เรียงลำดับลักษณะข้อบกพร่องย่อย 3 ลำดับ จากมากไปหาน้อยดังนี้ นักเรียนทำไม่ครบขั้นตอนหรือลำดับขั้นตอนผิด เปลี่ยนประโยคภาษาเป็นประโยคคณิตศาสตร์ไม่ได้ และบอกกฎ สูตร หรือนิยามของจำนวนนับไม่ได้ และเมื่อรวมลักษณะข้อบกพร่องย่อยเป็นลักษณะข้อบกพร่องใหญ่ได้ 4 ลักษณะ เรียงลำดับความถี่ที่พบต่อจำนวนความถี่ที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากมากไปน้อย คือ

การตรวจสอบการแก้ปัญหา ร้อยละ 56 การใช้กฎ สูตร และนิยาม ร้อยละ 36.89 การตีความหมาย ร้อยละ 29.00 และลำดับสุดท้ายคือ การคิดคำนวณ ร้อยละ 23.00

กิติยารัตน์ ภูริพัฒน์ (2545 : 67) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การพัฒนาแบบทดสอบวินิจฉัยในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ผลการวิจัยพบว่า 1. แบบทดสอบที่สร้างขึ้นประกอบด้วยแบบทดสอบชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 6 ฉบับ คือ 1) ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ 2) ค่าของฟังก์ชันและโคไซน์ 3) ฟังก์ชันตรีโกณมิติ อื่น ๆ 4) ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม 5) การอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง 6) กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ศึกษาเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของโรงเรียนในสังกัดสำนักงานสามัญศึกษาจังหวัดอุบลราชธานี จำนวน 957 คน ซึ่งได้มาจากการสุ่มตัวอย่างหลายขั้นตอน ขั้นตอนในการดำเนินงานคือ สร้างแบบทดสอบสำรวจ ซึ่งมีลักษณะเป็นข้อสอบแบบอัตนัยและบอกเหตุผลในการตอบที่สอดคล้องกับเนื้อหา และจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมและนำไปทดสอบหาจุดบกพร่องและรวบรวมคำตอบผิดที่มี ความถี่มากที่สุด 3 อันดับแรกเพื่อใช้เป็นตัวลวงในแบบทดสอบวินิจฉัย นำแบบทดสอบวินิจฉัยที่สร้างขึ้นไปทดสอบ 3 ครั้ง การทดสอบครั้งที่ 1 และครั้งที่ 2 เป็นการทดสอบเพื่อปรับปรุงคุณภาพข้อสอบ โดยวิเคราะห์ตามแนวทฤษฎีประเพณีนิยม ครั้งที่ 3 เพื่อทดสอบคุณภาพทั้งฉบับและจัดทำคู่มือการใช้แบบทดสอบ 2. แบบทดสอบวินิจฉัยนี้มีทั้งหมด 6 ฉบับ มีจำนวนข้อสอบ ดังนี้ 10 16 4 10 4 และ 3 ข้อ ตามลำดับ คะแนนจุดตัดมีค่า 8 13 3 8 3 และ 2 ตามลำดับ มีค่าความยากตั้งแต่ .40 ถึง .82 ค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ .52 ถึง 1.00 ค่าความเชื่อถือได้ตั้งแต่ .51 ถึง .85 และค่าความแม่นตรงเชิงเนื้อหา พิจารณาจากผู้เชี่ยวชาญทางด้านเนื้อหาและทางด้านวัดผล ผลปรากฏว่า แบบทดสอบวินิจฉัยวัดเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ได้จริง 3. คู่มือการใช้แบบทดสอบวินิจฉัยวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ประกอบด้วย จุดมุ่งหมายของแบบทดสอบ โครงสร้างของแบบทดสอบ ลักษณะของแบบทดสอบ คุณภาพของแบบทดสอบ เวลาที่ใช้ในการทดสอบ วิธีดำเนินการและแบบเฉลยข้อสอบ 4. ผลการศึกษาพบสาเหตุที่ทำให้เกิดจุดบกพร่องเรียงลำดับจากมากไปหาน้อยคือ นักเรียนบกพร่องการคิดคำนวณ นักเรียนไม่เข้าใจค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ บกพร่องเรื่องการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ ไม่เข้าใจในการกำหนดเครื่องหมายในควอดรันต์ บกพร่องเรื่องการหาค่าและไม่เข้าใจเขียนค่าของเลขคณิตของพิกัดและการหารเศษ ส่วน ตามลำดับ

นิคม พรมณี และคณะ (2548 : 67 - 68) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การศึกษาข้อบกพร่องในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวตามตัวแบบการแก้โจทย์ปัญหาของโพลยาของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 สังกัดโรงเรียนมัธยมศึกษา สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาสระแก้ว เขต 1 ผลการวิจัยพบว่า 1) นักเรียนชายและนักเรียนหญิงมีข้อบกพร่องที่ 3 การดำเนินการแก้ปัญหา

มากที่สุด รองลงมา เป็นข้อบกพร่องที่ 4 การตรวจสอบคำตอบ ข้อบกพร่องที่ 2 การวางแผนการแก้ปัญหา และข้อบกพร่องที่ 1 การทำความเข้าโจทย์ ตามลำดับ ส่วนนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง ปานกลาง และต่ำ มีข้อบกพร่องที่ 3 การดำเนินการแก้ปัญหามากที่สุด รองลงมา เป็นข้อบกพร่อง ที่ 4 การตรวจสอบคำตอบ ข้อบกพร่องที่ที่ 2 การวางแผนการแก้ปัญหาและข้อบกพร่องที่ 1 การทำความเข้าใจโจทย์ ตามลำดับ 2) นักเรียนชายและนักเรียนหญิง มีข้อบกพร่องในการแก้โจทย์ปัญหาสมการ เชิงเส้นตัวแปรเดียวตามตัวแบบ การแก้โจทย์ปัญหาของโพลยา แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 3) นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง ปานกลาง และต่ำมีข้อบกพร่องในการแก้โจทย์ปัญหาสมการ เชิงเส้นตัวแปรเดียวตามตัวแบบการแก้โจทย์ปัญหาของโพลยาแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ ทางสถิติที่ระดับ .05

นราวิน ไวยมาลา (2548 : 67 - 68) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียน กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ด้านการแก้โจทย์ปัญหา เรื่องการบวกลบ โดยใช้สมการ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนวัดเชิงเลน ผลการวิจัยพบว่านักเรียนชั้นประถมศึกษา ปีที่ 6 โรงเรียนวัดเชิงเลนที่มีคะแนนเฉลี่ยหลังจากทำแบบทดสอบวินิจฉัย มีค่าเฉลี่ย เท่ากับ18.16 สูงกว่าเกณฑ์ที่กำหนดไว้คือ จะต้องทำได้ไม่น้อยกว่า 14 ข้อ จากข้อสอบทั้งหมด 23 ข้อ มีนักเรียนทั้งหมด 30 คนสามารถทำแบบทดสอบวินิจฉัยผ่านเกณฑ์ร้อยละ 81.08 และมีนักเรียนไม่ผ่านเกณฑ์ 7 คน คิดเป็นร้อยละ 18.92 มีสาเหตุข้อบกพร่องเกี่ยวกับ การแก้โจทย์ปัญหา เรื่องการบวกและลบ โดยใช้สมการที่พบมากที่สุด คือเขียนสมการผิด ร้อยละ 13.64 รองลงมาบวกผิด ร้อยละ 6.31 บกพร่องน้อยที่สุด คือ ไม่สามารถเขียนสมาการได้ ร้อยละ 3.02

ไพรวัล ดวงตา (2550 : 56 - 57) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การพัฒนาการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผลการวิจัย พบว่า 1) เนื้อหาเรื่องอัตราส่วนและร้อยละที่นักเรียนบกพร่องเรียงลำดับจากมากไปหาน้อย ดังนี้ การคิดคำนวณเกี่ยวกับอัตราส่วนและร้อยละ และการตีความหมายในแต่ละเรื่องผิด 2) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังการสอนซ่อมเสริมสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนการสอนซ่อมเสริม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 3) แผนการจัดกิจกรรมซ่อมเสริมที่สร้างขึ้นในการแก้ปัญหา ข้อบกพร่องทางการเรียนของนักเรียนมีประสิทธิภาพ 77/75

วรนุช มาตระกูล (2551 : 67) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนจุนวิทยาคม จังหวัดพะเยา ผลการวิจัยสรุปได้ดังนี้ ลักษณะของข้อบกพร่องที่พบคือด้านการใช้ทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยาม และสมบัติ ด้านการคิดคำนวณ และด้านการตีความจากโจทย์ คิดเป็นร้อยละ ของข้อบกพร่อง ทั้งหมดคือ 65.35 30.97 และ 3.68 ตามลำดับ ข้อบกพร่องด้านการใช้ทฤษฎีบท สูตร

กฎ นิยาม และสมบัติ พบว่านักเรียนขาดความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยามและสมบัติมากที่สุด รองลงมาคือ จำทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยามและสมบัติผิด ขาดทักษะในการเลือกทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยามและสมบัติที่เหมาะสมมาใช้ และประยุกต์ใช้ข้อมูลกับทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยามและสมบัติไม่ถูกต้อง ข้อบกพร่องด้านการคิดคำนวณพบว่านักเรียนขาดความเข้าใจในหลักเลขคณิต เบื้องต้นมากที่สุด รองลงมาคือ ขาดความระมัดระวังในการคิดคำนวณ การสรุปผลไม่ถูกต้องหรือสรุปผลไม่ครบทุกกรณี ทำผิดขั้นตอนที่ถูกต้องในการคิดคำนวณตามลำดับ ส่วนข้อบกพร่องด้านการตีความจากโจทย์ พบว่านักเรียนนำข้อมูลมาใช้ผิด

ศศินภา กาละปลูก (2552 : 58) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การวิเคราะห์ความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหาสมการของนักเรียนชนเผ่าลาหู่ โดยใช้กระบวนการวิเคราะห์ความผิดพลาดของนิวแมน ผลการวิจัยพบว่า 1. ความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหาสมการของนักเรียนมีทั้งหมด 55 ความผิดพลาด ซึ่งเป็นความผิดพลาดประเภทการเปลี่ยนรูป 21 ความผิดพลาด การทำความเข้าใจศัพท์เฉพาะ20 ความผิดพลาด การสรุปตอบ 4 ความผิดพลาด และการใช้ทักษะกระบวนการ 4 ความผิดพลาด สำหรับความผิดพลาดจากการอ่านมี 3 ความผิดพลาด และความสะเพร่ามี 3 ความผิดพลาด 2. สาเหตุความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหาสมการของนักเรียน มีดังนี้ 1) ขั้นการอ่านและในขั้นการทำความเข้าใจศัพท์เฉพาะเกิดจากปัญหาด้านการใช้ภาษาไทยในการสื่อสาร 2) ขั้นการเปลี่ยนรูปเกิดจากนักเรียนกำหนดตัวแปรในสมการไม่ถูกต้อง และนักเรียนเดาคำตอบผิดไว้ก่อนแล้วจึงสร้างสมการเพื่อให้ได้คำตอบตรงกับที่คาดคะเนเอาไว้ 3) ขั้นการใช้ทักษะกระบวนการเกิดจากการคิดคำนวณเพียงเพื่อต้องการให้ได้คำตอบตรงกับที่คาดคะเนเอาไว้ การนำกระบวนการทางคณิตศาสตร์มาใช้ผิด การตรวจสอบคำตอบผิด การคิดคำนวณที่ไม่ถูกต้องและความสะเพร่า 4) ขั้นการสรุปตอบ เกิดจากความสะเพร่าในการสรุปตอบ

วัฒนิตา นำแสงวานิช (2552 : 59 - 60) ได้ทำการวิจัยเรื่อง ผลของการแก้ไขข้อบกพร่องที่เป็นความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ เรื่องเศษส่วน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา ปีที 1 โดยการใช้แบบฝึกทักษะ ผลการวิจัยพบว่า 1) ในเรื่อง เศษส่วน นักเรียนชั้นมัธยมศึกษา ปีที่ 1 ส่วนใหญ่มีข้อบกพร่องที่เป็นความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ในเรื่องตัวคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.) รองลงมาคือเรื่องลำดับขั้นการคิดคำนวณ การแปลงประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ การหารจำนวนเต็มการคูณจำนวนเต็ม การลบจำนวนเต็ม และการบวกจำนวนเต็ม เรียงตามลำดับ 2) ผลของการแก้ไขข้อบกพร่องที่เป็นความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์เรื่องเศษส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้แบบฝึกทักษะ พบว่า 2.1 หลังการแก้ไขข้อบกพร่องครั้งที่ 1 มีนักเรียนที่สามารถแก้ไขข้อบกพร่องที่เป็นความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วน ได้ คิดเป็นร้อยละ 66.67 2.2 หลังการแก้ไขข้อบกพร่องครั้งที่ 2 มีนักเรียนที่สามารถแก้ไขข้อบกพร่องที่เป็นความรู้พื้นฐานทาง

คณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วน ได้ คิดเป็นร้อยละ 64.29 2.3 อัตราส่วนของจำนวนนักเรียนที่สามารถแก้ไขข้อบกพร่องที่เป็นความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์เรื่องเศษส่วน ได้ ต่อจำนวนนักเรียนที่มีข้อบกพร่องที่เป็นความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์เรื่องเศษส่วน ทั้งหมดคิดเป็น 37:42 2.4 สัดส่วนของนักเรียนที่สามารถแก้ไขข้อบกพร่องที่เป็นความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์เรื่องเศษส่วน ได้และไม่ได้ แตกต่างกันที่ระดับความมีนัยสำคัญทางสถิติที่ .05

2. งานวิจัยต่างประเทศ

Davis (1979 : 66 - 67) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การวิเคราะห์ข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษา โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาข้อผิดพลาดของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ที่เกี่ยวข้องกับโครงสร้างของสาเหตุข้อบกพร่อง พร้อมทั้งวิธีการแก้ไขผลการวิจัยพบข้อผิดพลาดในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเลขคณิต พีชคณิต เรขาคณิต และแคลคูลัส 7 อย่าง คือข้อผิดพลาดที่เกี่ยวกับการสุ่มกฎเกณฑ์ ลำดับ โครงสร้าง การตีความด้านภาษา การสรุปประโยคแสดงที่เกี่ยวกับกริยา การให้เหตุผล และการใช้กฎที่ผิดลำดับขั้นตอน

Ong & Lim (1987 : 57 - 59) ได้ทำการวิจัยเรื่องความเข้าใจและข้อผิดพลาดใน วิชาพีชคณิต โดยมีวัตถุประสงค์ เพื่อสำรวจผลการสอนเกี่ยวกับความเข้าใจในวิชาพีชคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาในสิงคโปร์ กลุ่มตัวอย่าง คือ นักเรียนระดับมัธยมศึกษาที่มีอายุระหว่าง 15 – 16 ปี จำนวน 3 กลุ่ม เป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 365 คน นักเรียนระดับเตรียมอุดมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 339 คน และนักศึกษาระดับมหาวิทยาลัยจำนวน 267 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบทดสอบพีชคณิตที่ผู้วิจัยดัดแปลงมาจากของอีแวน(Evans) ผลการวิจัยพบว่านักเรียนจำนวนมากที่มีอายุระหว่าง 15-16 ปี ไม่สามารถแก้ปัญหาพีชคณิตง่าย ๆ ได้ และสาเหตุข้อผิดพลาดส่วนใหญ่ เนื่องจากนักเรียนไม่เข้าใจในการใช้ตัวอักษรแทนตัวแปรหรือค่าคงที่ นักเรียนไม่สามารถแก้สมการซึ่งมีตัวแปรหรือสมการที่ยากกว่าสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้ และนักเรียนใช้การแทนค่าจำนวนในสมการโดยไม่พิจารณากรณีที่เป็นไปไม่ได้

Nitsa Movshovitz-Hadar and other (1987 : 58 - 59)ได้ทำการวิจัยเรื่องการวิเคราะห์รูปแบบข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษา ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนเกรด 11 จำนวน 110 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยคือลักษณะข้อบกพร่องจำนวน 6 ด้าน และแบบสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัย ผลการวิจัยพบว่านักเรียนมีข้อบกพร่องตามลักษณะข้อบกพร่อง เรียงตามลำดับความถี่จากมากไปหาน้อยในด้านต่างๆ ดังต่อไปนี้ คือ การบิดเบือน

ทฤษฎี กฎ สูตร และนิยาม การใช้เทคนิคในการทำผิด การใช้ข้อมูลผิด ข้อผิดพลาดในการใช้ภาษา การอ้างอิงวิธีการคิดหาเหตุผลที่ไม่สมบูรณ์ และไม่มีการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา

Colgan (1991 : 57) ได้ทำการวิจัยเรื่องการวิเคราะห์ข้อบกพร่องในการแก้ไขโจทย์ในวิชาอันตคณิตศาสตร์ (Finite Mathematics) ของนักศึกษาระดับวิทยาลัย กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาในมหาวิทยาลัยอินเดียนนา จำนวน 250 คน โดยศึกษาจากการทดสอบย่อย การสอบ และจากแบบทดสอบวัดทักษะทางคณิตศาสตร์ พบว่าข้อบกพร่องของนักศึกษานั้นอธิบายได้โดยใช้การแจกแจงลักษณะข้อบกพร่องของ โมว์โชวิทย์ - ฮาร์ดาร์, ซาสลาฟสกี้ และอินบา (Movshovitz – Hadar Zaslavsky & Inner. 1987) ข้อบกพร่องที่ได้เรียงจากมากไปหาน้อย ได้แก่ ข้อบกพร่องด้านการใช้ภาษา การขาดความรอบคอบ และเทคนิควิธีการในทุกระดับคะแนน นักศึกษามีเปอร์เซ็นต์ของข้อบกพร่องแต่ละชนิดเท่า ๆ กัน และมีนักการศึกษาบางส่วนบกพร่องด้านทักษะการคิดคำนวณ และบางส่วนบกพร่องด้านทักษะ การแก้ปัญหา

Truran (1987 : 66 - 67) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการวิเคราะห์ความผิดพลาดและเทคนิคการแก้ไขในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยทำการศึกษา กับกลุ่มนักเรียนที่มีอายุระหว่าง 7-15 ปี ที่มีอุปสรรคในการเรียนคณิตศาสตร์ เครื่องมือที่ทำการวิจัยเป็นแบบทดสอบและการสัมภาษณ์ซึ่งมีการบันทึกเสียงไว้ แล้วนำมาสรุปผลการหาสาเหตุของข้อผิดพลาดของนักเรียนแต่ละคน ตามระดับความผิดพลาดที่เกิดขึ้น ซึ่งพิจารณาโดยใช้รูปแบบความผิดพลาด 9 ด้าน ของคาเซย์ คือ รูปแบบของคำถาม การอ่านคำถาม ความเข้าใจคำถาม กลยุทธในการเลือกใช้ความรู้ ทักษะการเลือกใช้ความรู้ ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ การเสนอคำตอบความผิดพลาดซึ่งไม่สามารถระบุสาเหตุที่แน่นอนได้ เนื่องมาจากความระมัดระวังและความผิดพลาดซึ่งครูจะทราบได้จากการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียน ผลการศึกษาพบข้อผิดพลาดตามรูปแบบนี้ แล้วนำเสนอวิธีการแก้ไข คือ ให้ใช้ประโยชน์จากสิ่งที่เป็นนามธรรมมาช่วยทั้งในส่วนบุคคลและในชั้นเรียน ให้นักเรียนใช้สมุดจดคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ที่พบใหม่พร้อมทั้งความหมายใช้ทักษะการอ่านในการแก้โจทย์ปัญหาตามลำดับขั้นต่อไปนี้ วิเคราะห์ประโยคอ่านซ้ำข้อความที่ไม่เข้าใจ ค้นหาคำถามซึ่งต้องการคำตอบ ค้นหาว่าตนเองกำลังศึกษาโจทย์ถึงขั้นใด อ่านประโยคดัง ๆ ถ้ายังไม่เข้าใจ ปรับระดับและสไตล์การอ่านให้ตรงกับเนื้อหาจนเข้าใจในเนื้อหาของคำถาม แล้วแปลความหมายของสิ่งที่อ่านไปสู่การคำนวณ นอกจากนี้ ครูควรช่วยเหลือนักเรียนแก้ปัญหาของบทเรียน โดยการอธิบายในชั้นเรียนก่อนที่จะให้นักเรียนลงมือทำ

จากการศึกษางานวิจัยทั้งในประเทศและต่างประเทศดังกล่าวมาข้างต้น ซึ่งเป็นเรื่องเกี่ยวกับการวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเรื่องฟังชันก์ตรีโกณมิติ สรุปได้ว่า นักเรียนมีความบกพร่องในการเรียน อยู่ 2 ประเภท คือ การบกพร่อง

ทางการเรียนทั่วไป และการบกพร่องในการแก้โจทย์ปัญหา สำหรับบกพร่องทางการเรียนทั่วไป พบว่า นักเรียนมีข้อบกพร่องด้านการใช้ทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยาม และสมบัติ นักเรียนขาดความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยามและสมบัติ จำทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยามและสมบัติผิด ขาดทักษะในการเลือกทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยามและสมบัติที่เหมาะสมมาใช้ และประยุกต์ใช้ข้อมูลกับทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยามและสมบัติไม่ถูกต้อง ด้านการคิดคำนวณ นักเรียนขาดความเข้าใจในหลักเลขคณิตเบื้องต้น ขาดความระมัดระวังในการคิดคำนวณ การสรุปผลไม่ถูกต้องหรือสรุปผลไม่ครบทุกกรณี ทำผิดขั้นตอนที่ถูกต้องในการคิดคำนวณ ด้านการตีความจากโจทย์ นักเรียนนำข้อมูลมาใช้ผิด ส่วนการบกพร่องในการแก้โจทย์ปัญหา พบว่า นักเรียนมีข้อบกพร่องในการดำเนินการแก้ปัญหา การตรวจสอบคำตอบ การวางแผนการแก้ปัญหา การทำความเข้าใจโจทย์ การแก้โจทย์ปัญหา เรื่องการบวกและลบ โดยใช้สมการ เขียนสมการผิด บวกผิด ไม่สามารถเขียนสมาการได้ ดังนั้นการวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ จึงเป็นประโยชน์ในการพัฒนาการเรียนการสอนต่อไป