บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัย เรื่อง การศึกษาความสามารถในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผู้วิจัยได้ศึกษา เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องตามลำดับดังนี้

1. แบบรูปและความสัมพันธ์เกี่ยวกับ สมการเชิงเส้นและเลขยกกำลังในหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

1.1 ความหมายของแบบรูป

1.2 ประเภทของแบบรูป

1.3 แบบรูปและความสัมพันธ์เกี่ยวกับ สมการเชิงเส้นและเลขยกกำลัง

2. การให้เหตุผลเชิงพีชคณิต

2.1 การให้เหตุผล

2.2 การให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์

2.3 การให้เหตุผลเชิงพีชคณิต

3. ความสามารถในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต

3.1 ความสามารถ

3.2 การสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต

4. กลวิธีที่ใช้ในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิตและการอ้างเหตุผล

4.1 ประเภทและการใช้กลวิธีในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต

4.2 การอ้างเหตุผล

4.3 ลักษณะการอ้างเหตุผลในการใช้กลวิธีในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต

4.4 ระดับของการใช้กลวิธีในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต

5. ความยืดหยุ่นในการใช้กลวิธีเพื่อสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต

5.1 ความหมายของความยืดหยุ่นในการใช้กลวิธีเพื่อสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต

5.2 ประเภทของความยืดหยุ่นในการใช้กลวิธีเพื่อสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต

5.3 การพิจารณาความยืดหยุ่นในการใช้กลวิธีเพื่อสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต

6. การตั้งเกณฑ์การประเมินความสามารถในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต

7. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

7.1 งานวิจัยในประเทศ

7.2 งานวิจัยต่างประเทศ

แบบรูปและความสัมพันธ์เกี่ยวกับ สมการเชิงเส้นและเลขยกกำลังในหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

แบบรูปและความสัมพันธ์เป็นเนื้อหาหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์ที่ถูกกำหนดในหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พ.ศ. 2551 ทั้งในระดับชั้นประถมศึกษาและระดับมัธยมศึกษา จากการศึกษาเอกสารเกี่ยวกับแบบรูปและความสัมพันธ์ ทำให้ทราบความหมายและประเภทของแบบรูป ดังนี้

ความหมายของแบบรูป

นักการศึกษาหลายท่านได้ให้ความหมายของแบบรูป ดังนี้

สมวงษ์ แปลงประสพโชค (2543: 19) กล่าวว่า แบบรูปเป็นความสัมพันธ์ที่มีลักษณะร่วมและลักษณะต่าง ซึ่งสามารถสรุปเป็นกฎเกณฑ์ได้

มนัสนันท์ ทองทา (2545 : ออนไลน์) ได้ให้ความหมายแบบรูปว่า แบบรูป เป็นความสัมพันธ์แสดงลักษณะสำคัญร่วมกันของชุดของจำนวน รูปเรขาคณิต รูปภาพหรืออื่นๆ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2550 : 36) ได้ให้ความหมายของแบบรูปไว้ว่า แบบรูปเป็นการแสดงความสัมพันธ์ที่แสดงลักษณะสำคัญร่วมกันของรูปเรขาคณิตหรือชุดของจำนวน ด้วยการนำสิ่งของต่าง ๆ หรือจำนวนต่าง ๆ มาเรียงลำดับกันตามกฎเกณฑ์ เมื่อมองเห็นกฎเกณฑ์การสังเกตและวิเคราะห์แล้ว สามารถคาดเดาได้ว่า

สิ่งของหรือจำนวนต่อไปคืออะไร นอกจากนี้ยังกล่าวว่าแบบรูปเป็นการแสดงความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ ของรูปเรขาคณิต และรูปอื่น ๆ หรือจำนวน ด้วยการนำสิ่งเหล่านั้นมาเรียงลำดับกันตามกฎเกณฑ์ที่กำหนด

สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา (2551: 60-61) ได้ให้ความหมายของแบบรูปว่า แบบรูปเป็นความสัมพันธ์ที่แสดงลักษณะสำคัญร่วมกันของชุดของจำนวน รูปเรขาคณิต หรืออื่นๆ

โกลอส (Golos. 1981: 38) กล่าวถึงแบบรูปว่า เป็นการเรียนรู้เกี่ยวกับการแยกแยะและจัดเรียงวัตถุที่เกิดขึ้นในธรรมชาติหรือสร้างขึ้นตามความสนใจของผู้เรียน ซึ่งแบบรูปจะช่วยฝึกนักเรียนในเรื่องการสังเกต การคาดเดาและการอธิบาย

บิชอป (Bishop. 2000 : 109) กล่าวว่า แบบรูปเป็นสิ่งที่อยู่รอบ ๆ ตัวเรา แบบรูปในคณิตศาสตร์จึงถูกนำมาใช้อย่างกว้างขวาง แบบรูปเป็นศิลปะของการคิดคำนวณ โดยสามารถแบ่งเป็นกลุ่มใหญ่ ๆ ได้แก่ แบบรูปธรรมในชาติ แบบรูปของจำนวน แบบรูปของรูปสมมาตร แบบรูปของความคิด และแบบรูปที่ไม่เป็นระบบ

ชาร์เลสวอร์ท (Charlesworth. 2000: 136-140) กล่าวว่า แบบรูปเป็นการทำซ้ำๆ ของการค้นพบหรือการได้สัมผัส ได้ยิน ได้เห็นบ่อยๆ สม่ำเสมอ อย่างเป็นระบบ เป็นลำดับทีละลำดับและมีแบบแผน

จากความหมายของแบบรูปข้างต้น สรุปว่า แบบรูปเป็นการแสดงความสัมพันธ์ที่แสดงลักษณะร่วมกันของสิ่งต่างๆ เช่น รูปเรขาคณิต ชุดของจำนวน หรือรูปอื่นๆ ด้วยการนำสิ่งเหล่านั้นมาเรียงลำดับตามเกณฑ์ที่กำหนด เมื่อมองเห็นกฎเกณฑ์จากการสังเกตและวิเคราะห์แล้ว สามารถคาดเดาได้ว่าสิ่งของหรือจำนวนต่อไปคือ

ประเภทของแบบรูป

มีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงประเภทของแบบรูป ดังนี้

มนัสนันท์ ทองทา (2545 : ออนไลน์) ได้เสนอว่า ลักษณะของแบบรูปแบ่งออกเป็น 4 แบบรูป คือ

1. แบบรูปจำนวน (Number Patterns)
2. แบบรูปของรูปภาพ (Picture Patterns)
3. แบบรูปในรูปเรขาคณิต (Patterns in Geometric Shapes)
4. แบบรูปในสามเหลี่ยมปาสคาล (Patterns in Pascals Triangle)

สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา (2551: 60-61) แบ่งแบบรูปเป็น 2 ประเภท ได้แก่

1. แบบรูปชุดของรูปเรขาคณิต เช่น □ □ □ □ ... และถ้าความสัมพันธ์เป็นเช่นนี้เรื่อยไป นักเรียนน่าจะคาดการณ์ได้ว่า รูปต่อไปในแบบรูปนี้ควรเป็นรูปสี่เหลี่ยม ด้วยเหตุผลที่ว่ามีการเขียนรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมสลับกันครั้งละหนึ่งรูป

2. แบบรูปชุดของจำนวน เช่น 101 1001 10001 100001 ... และถ้าความสัมพันธ์เป็นเช่นนี้เรื่อยไป นักเรียนน่าจะคาดการณ์ได้ว่า จำนวนถัดไปควรเป็น 1000001 ด้วยเหตุผลที่ว่าตัวเลขที่แสดงจำนวนถัดไปได้มาจากการเติมศูนย์เพิ่มขึ้นมาหนึ่งตัวในระหว่างเลขโดดหนึ่งที่อยู่หัวท้าย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2544 : ออนไลน์) แบ่งแบบรูปออกเป็น 4 ประเภท ได้แก่ แบบรูปของจำนวน (Number Patterns) แบบรูปของรูปภาพ (Picture Patterns) แบบรูปของรูปเรขาคณิต (Patterns in Geometric Shapes) และแบบรูปของสามเหลี่ยมปาสคาล (Patterns in Pascal's Triangle)

บิชอป (Bishop. 2000 : 110) แบ่งแบบรูปออกเป็น 2 ประเภท คือ

1. แบบรูปของจำนวน (Number Pattern) เป็นลำดับของจำนวนซึ่งมีกฎของการเรียงต่อกัน อาจใช้การคำนวณจากจำนวนในตำแหน่งก่อนหน้า หรือการคำนวณโดยใช้ตำแหน่งในลำดับ

2. แบบรูปของจำนวนที่เป็นรูปเรขาคณิต (Geometric Number Pattern) เป็นลำดับความสัมพันธ์ของจำนวนซึ่งเป็นรูปเรขาคณิต โดยแต่ละรูปได้มาจากกระบวนการหรือความสัมพันธ์ของลำดับก่อนหน้า

วาร์เรน และคูเปอร์ (Warren and Cooper. 2008 : 113-114) แบ่งแบบรูปออกเป็น 3 ประเภท ได้แก่

1. แบบรูปซ้ำ (Repeat Pattern) เป็นแบบรูปที่มีโครงสร้างซ้ำ ซึ่งสามารถหาพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้จากความสัมพันธ์สั้นๆ ตัวอย่างแบบรูปซ้ำ เช่น A B B A B B A B B A... หรือ แดง เขียว แดง เขียว แดง เขียว... เป็นต้น

2. แบบรูปเพิ่ม (Growing Patterns) เป็นความสัมพันธ์ของลำดับซึ่งเรียกแต่ละลำดับว่า พจน์ โดยแต่ละพจน์ในแบบรูปขึ้นอยู่กับพจน์ก่อนหน้าหรือตำแหน่งของพจน์

ในแบบรูป แบบรูปเพิ่มส่วนใหญ่จะเกี่ยวข้องกับแบบรูปที่เป็นรูปเรขาคณิตซึ่งมีความเป็นรูปธรรมสูง ตัวอย่างแบบรูปเพิ่ม เช่น 3, 6, 9, 12, 15, 18,... หรือ □ □ □ □ □ □ □ □ □ ... เป็นต้น

3. แบบรูปของจำนวน (Number Patterns) เป็นแบบรูปที่ถูกสร้างขึ้นจากตัวเลข ซึ่งแบบรูปของจำนวนสามารถเป็นได้ทั้งแบบรูปซ้ำและแบบรูปเพิ่ม ตัวอย่างแบบรูปของจำนวนที่เป็นแบบรูปซ้ำ เช่น 122122122122... และตัวอย่างแบบรูปของจำนวนที่เป็นแบบรูปเพิ่ม เช่น 3, 7, 11,15, 19,... เป็นต้น

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า แบบรูปมีหลายประเภทตามลักษณะของสิ่งที่นำมาเรียงกันตามกฎเกณฑ์ที่กำหนดและลักษณะสำคัญร่วมกัน แบ่งออกเป็น แบบรูปของรูปภาพหรือรูปเรขาคณิต และแบบรูปของจำนวน ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้แบบรูปที่นำมาใช้ในสถานการณ์ปัญหาเชิงพีชคณิต เป็นแบบรูปของจำนวนที่สามารถวิเคราะห์หาความสัมพันธ์แล้วสามารถสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิตได้ ซึ่งเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง ได้แก่ สมการเชิงเส้นและเลขยกกำลัง

แบบรูปและความสัมพันธ์เกี่ยวกับ สมการเชิงเส้นและเลขยกกำลัง

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์มุ่งให้เยาวชนทุกคนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่องตามศักยภาพ โดยกำหนดสาระหลักที่จำเป็นสำหรับผู้เรียนทุกคน 6 สาระ (กระทรวงศึกษาธิการ. 2552 : 1 – 5) ได้แก่ จำนวนและการดำเนินการ การวัด เรขาคณิต พีชคณิต การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น และ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และได้กำหนดสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์และมาตรฐานการเรียนรู้ที่เกี่ยวข้องกับแบบรูปและความสัมพันธ์เกี่ยวกับ สมการเชิงเส้นและเลขยกกำลัง ได้แก่

มาตรฐาน ค 1.1 เข้าใจถึงความหลากหลายของการแสดงจำนวนและการใช้จำนวนในชีวิตจริง

มาตรฐาน ค 1.2 เข้าใจถึงผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการของจำนวนและความสัมพันธ์ระหว่างการดำเนินการต่าง ๆ และใช้การดำเนินการในการแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค. 4.1 เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป (Pattern) ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

มาตรฐาน ค 4.2 ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) อื่น ๆ แทนสถานการณ์ต่าง ๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหา

ซึ่งในเรื่องแบบรูปนั้น นักเรียนได้เรียนตั้งแต่ระดับประถมศึกษาจนถึงมัธยมศึกษาตอนต้น ส่วนเรื่องสมการเชิงเส้นและเลขยกกำลัง นักเรียนได้เรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ในการจัดการเรียนรู้เรื่องแบบรูปและความสัมพันธ์เกี่ยวกับ สมการเชิงเส้นและเลขยกกำลัง สามารถวิเคราะห์ตามตัวชี้วัดที่กำหนดไว้ในหลักสูตร ดังแสดงในตารางที่ 1 ดังนี้

ตารางที่ 1 การวิเคราะห์ตัวชี้วัดของแบบรูปและความสัมพันธ์เกี่ยวกับ สมการเชิงเส้นและเลขยกกำลัง

ระดับชั้น	ตัวชี้วัด
ป.1	1.บอกจำนวนและความสัมพันธ์ในแบบรูปของจำนวนที่เพิ่มขึ้นทีละ 1 ทีละ 2 และลดลงทีละ 1 2. บอกรูปและความสัมพันธ์ในแบบรูปของรูปที่มีรูปร่าง ขนาด หรือสีที่สัมพันธ์กันอย่างใดอย่างหนึ่ง
ป.2	1. บอกจำนวนและความสัมพันธ์ในแบบรูปของจำนวนที่เพิ่มขึ้นทีละ 5 ทีละ 10 ทีละ 100 และลดลงทีละ 2 ทีละ 10 ทีละ 100 2. บอกรูปและความสัมพันธ์ในแบบรูปของรูปที่มีรูปร่าง ขนาด หรือสีที่สัมพันธ์กันอย่างใดอย่างหนึ่ง
ป.3	1. บอกจำนวนและความสัมพันธ์ในแบบรูปของจำนวนที่เพิ่มขึ้นทีละ 3 ทีละ 4 ทีละ 25 ทีละ 50 และลดลงทีละ 3 ทีละ 4 ทีละ 5 ทีละ 25 ทีละ 50 และแบบรูปซ้ำ 2. บอกรูปและความสัมพันธ์ในแบบรูปของรูปที่มีรูปร่าง ขนาด หรือสีที่สัมพันธ์กันสองลักษณะ
ป.4	1. บอกจำนวนและความสัมพันธ์ในแบบรูปของจำนวนที่เพิ่มขึ้น หรือลดลงทีละเท่ากัน 2. บอกรูปและความสัมพันธ์ในแบบรูปของรูปที่กำหนดให้
ป.5	1. บอกจำนวนและความสัมพันธ์ในแบบรูปของจำนวนที่กำหนดให้
ป.6	1. แก้ปัญหาเกี่ยวกับแบบรูป
ม.1	1.เข้าใจเกี่ยวกับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม และเขียนแสดงจำนวนให้อยู่ในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์ (Scientific Notation)

ระดับชั้น	ตัวชี้วัด
	2. อธิบายผลที่เกิดขึ้นจากการยกกำลังของจำนวนเต็ม เศษส่วนและทศนิยม 3. คูณและหารเลขยกกำลังที่มีฐานเดียวกันและเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม 4. วิเคราะห์และอธิบายความสัมพันธ์ของแบบรูปที่กำหนดให้ 5. แก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างง่าย 6. เขียนสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวจากสถานการณ์ หรือปัญหาอย่างง่าย 7. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างง่าย พร้อมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบ
ม.2	1. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว พร้อมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบ

สรุปได้ว่า นักเรียนได้เรียนรู้เรื่องแบบรูปและความสัมพันธ์เกี่ยวกับ สมการเชิงเส้นและเลขยกกำลัง มาตั้งแต่ในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 จนถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

การให้เหตุผลเชิงพีชคณิต

การให้เหตุผลเชิงพีชคณิต (Algebraic Reasoning) เป็นประเภทหนึ่งของการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ที่มีเนื้อหาสาระเกี่ยวกับพีชคณิต มีประเด็นต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

การให้เหตุผล

การให้เหตุผลเป็นพื้นฐานของการเรียนรู้และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ เราไม่สามารถดำเนินการทางคณิตศาสตร์ได้โดยปราศจากการให้เหตุผล การแสดงเหตุผลที่ดีมีคุณค่ามากกว่าการได้คำตอบที่ถูกต้อง (NCTM. 1989 : 159) การจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลจึงเป็นเรื่องที่ท้าทายความสามารถของครูผู้สอนคณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก เริ่มจากจะให้คำจำกัดความของการให้เหตุผลที่ดีว่าอย่างไร

องค์ประกอบของการให้เหตุผลมีอะไรบ้าง และจะปรับแนวความคิดทั้งสองประการไปสู่รูปแบบของการพัฒนาได้อย่างไร มีนักจิตวิทยา นักปรัชญา นักการศึกษา และหน่วยงานที่เกี่ยวข้องได้กล่าวถึงความหมายและองค์ประกอบของการให้เหตุผล ดังนี้

กระทรวงศึกษาธิการ (2546 : 9) ได้นำเสนอว่า ความสามารถในการให้เหตุผลเป็นความสามารถของนักเรียนในการให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

พจนานุกรมมรดกอเมริกา (The American Heritage Dictionary. 2006 : ออนไลน์) ได้นำเสนอเกี่ยวกับการให้เหตุผลว่า การให้เหตุผล (Reasoning) หมายถึง การคิดอย่างมีเหตุผลและเป็นไปตามหลักตรรกศาสตร์มีความหมายเดียวกับคำว่า การคิดเชิงตรรกศาสตร์ (Logical Thinking) และการคิดเชิงนามธรรม (Abstract Thought)

เลจห์ตัน (Leighton. 2004 : 11) กล่าวถึงความหมายของการให้เหตุผลว่า การให้เหตุผล หมายถึง กระบวนการในการสร้างข้อสรุป ทุกสิ่งทุกอย่างที่เราทำและคิด จะเกี่ยวข้องกับการสร้างข้อสรุป กล่าวคือ เมื่อเราเรียนรู้ วิเคราะห์ ตัดสิน สรุปอ้างอิง ประเมิน ฯลฯ เราจะต้องมีการสร้างข้อสรุปจากข้อมูลและความเชื่อของเราเสมอ

สารานุกรมเสรี (Wikipedia Encyclopaedia. 2006 : ออนไลน์)นำเสนอเกี่ยวกับการให้เหตุผลว่า การให้เหตุผล หมายถึง การคิดประเภทหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับภาษา ความตระหนักรู้ และหลักตรรกวิทยา ซึ่งมีแต่มนุษย์เท่านั้นที่รู้ว่าจะบูรณาการสิ่งเหล่านี้เข้าด้วยกันได้อย่างไร

คิม (Kim. 2005 : 59) กล่าวว่า การให้เหตุผล หมายถึง กระบวนการคิดหรือการดำเนินการภายในจิตใจในการใช้ความรู้เพื่อทำความเข้าใจ หรือสร้างข้อสรุปจากหลักฐาน กระบวนการในการให้เหตุผลจะเป็นการใช้ความรู้ที่มีในการแก้ปัญหาและการตัดสินใจ หรือเกี่ยวข้องกับการคิดอย่างมีวิจารณญาณและเป็นกรณีทั่วไป

คูเอลมาล์ (Quellmalz. 1987 : 82 – 105) ได้นำเสนอแนวคิดเกี่ยวกับกระบวนการให้เหตุผล ที่เกิดจากการวิเคราะห์วรรณกรรมที่เกี่ยวข้องกับทักษะการให้เหตุผลจากมุมมองของนักจิตวิทยา นักปรัชญาและนักการศึกษา จนได้พบว่าทฤษฎีของนักปรัชญาได้นำเสนอความหมายของการให้เหตุผลและเกณฑ์ในการประเมินการให้เหตุผลเอาไว้ กล่าวคือ ในทางปรัชญามองว่าการให้เหตุผลคือ การที่ผู้เรียนสามารถระบุเหตุผล ตัดสินความน่าเชื่อถือของหลักฐาน ใช้ทักษะการคิดแบบอุปนัยและนิรนัย ตัดสินใจอย่างถูกต้อง ส่วนในทางจิตวิทยาพบว่าทฤษฎีของนักจิตวิทยาเกี่ยวกับทักษะการคิดระดับสูง (Higher Order Thinking Skills) ถูกพัฒนาขึ้นภายใต้แนวคิดเกี่ยวกับการให้เหตุผลที่นำเสนอโดยนักปรัชญา นักจิตวิทยาให้

นิยามของทักษะการคิดระดับสูงบนพื้นฐานของความสามารถในการแก้ปัญหาของผู้เรียนที่เน้นเรื่องของกระบวนการคิด ส่วนนักการศึกษาและนักพัฒนาหลักสูตรจะมีแนวคิดเกี่ยวกับการให้เหตุผลที่ยืนอยู่บนแนวคิดของนักปรัชญาและนักจิตวิทยา เช่น แนวคิดของบลูม เป็นต้น จากการสังเคราะห์แนวคิดของบุคคลใน 3 กลุ่มดังกล่าวทำให้ดูเอลมาล์ซ สรุปว่า การให้เหตุผล คือ การที่ผู้เรียนสามารถระบุเหตุผล ตัดสินความน่าเชื่อถือของหลักฐาน ใช้ทักษะการคิดแบบอุปนัยและนิรนัย ตัดสินใจอย่างถูกต้อง และองค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผลควรมีองค์ประกอบพื้นฐาน ดังนี้

การวิเคราะห์ (Analysis) เป็นการให้เหตุผลในเทอมของแต่ละส่วนประกอบ คำที่ใช้ เช่น แบ่ง จัดประเภท จำแนก หาข้อแตกต่าง คำถามที่ใช้เช่น องค์ประกอบย่อยแต่ละส่วนมีอะไรบ้าง และแต่ละส่วนมีความสัมพันธ์กับส่วนทั้งหมดอย่างไร

การเปรียบเทียบ (Comparison) หมายถึง การให้เหตุผลในลักษณะของความเหมือนและความแตกต่างเปรียบเทียบ คำที่ใช้เช่น หาข้อแตกต่าง คำถามที่ใช้เช่น เชื่อมโยงสิ่งเหล่านี้เหมือนหรือแตกต่างกันอย่างไร

การสรุปอ้างอิง (Inference) เป็นการให้เหตุผลแบบอุปนัยหรือนิรนัย คำที่ใช้เช่น ทำนาย ตั้งสมมติฐาน อนุมาน อุปมาน คำถามที่ใช้เช่น จากสิ่งที่กำหนด คุณคิดว่าจะเกิดอะไรขึ้นต่อไป

การประเมิน (Evaluation) เป็นการแสดงและชี้แจงความคิดเห็นหรือมุมมองคำที่ใช้เช่น ประเมิน ตัดสิน คำถามที่ใช้เช่น ในความเห็นของคุณ แนวคิดใดดีที่สุดเพราะเหตุใด

ครูลิค และรุดนิกค์ (Krulik and Rudnick. 1995 : 85 – 89) กล่าวว่า การให้เหตุผลเป็นส่วนสำคัญของการคิดที่นอกเหนือไปจากการคิดขั้นระลึกได้ ซึ่งได้แก่

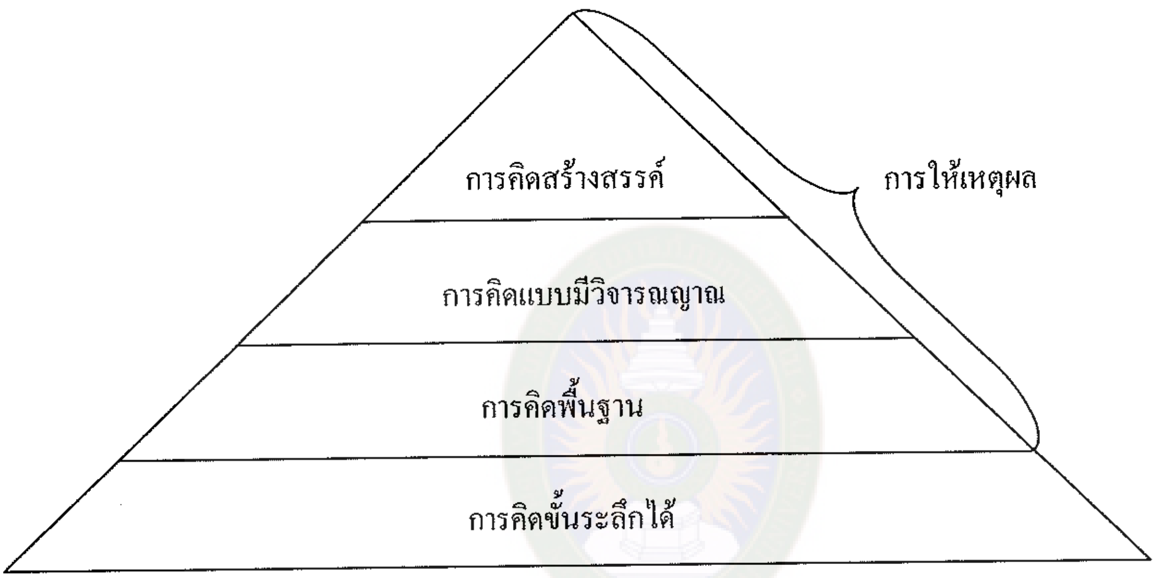
การคิดพื้นฐาน (Basic) ประกอบด้วยการเข้าใจความคิดรวบยอดต่างๆ เช่น เข้าใจความหมายของการบวก ลบ คูณ และหาร เป็นต้น และสามารถจดจำบริบทที่สามารถนำความคิดรวบยอดไปใช้ได้

การคิดแบบมีวิจารณญาณ (Critical) ประกอบด้วยการตรวจสอบ หาความสัมพันธ์ และประเมินลักษณะทั้งหมดของสถานการณ์หรือปัญหา การหาจุดสำคัญของส่วนต่าง ๆ ของสถานการณ์หรือปัญหา การรวบรวมและจัดระบบข้อมูล การวิเคราะห์และการหาความสมเหตุสมผลของข้อมูลการจดจำและเชื่อมโยงสถานการณ์ใหม่กับข้อมูลที่เคย

เรียนรู้มาก่อนหน้า การพิจารณาความสมเหตุสมผลของคำตอบ การสร้างข้อสรุปที่สมเหตุสมผล การวิเคราะห์และนำกลับไปใช้กับสถานการณ์จริง

การคิดสร้างสรรค์ (Creative) ประกอบด้วยการสร้างผลผลิตที่ซับซ้อน การสังเคราะห์หรือสร้างแนวคิดใหม่ และการประยุกต์ใช้แนวคิดเดิม

ซึ่งแนวคิดของครูลิคและรุดนิคก์ สามารถแสดงได้ดังแผนภาพที่ 2 ดังนี้



แผนภาพที่ 2 การให้เหตุผลตามแนวคิดของครูลิคและรุดนิคก์

บลูม (Bloom. et al. 1956: 203 – 204) ได้เสนอ Bloom' s Taxonomy ซึ่งเชื่อว่าการคิดสามารถจำแนกได้เป็น 6 ระดับได้แก่ ขั้นรับรู้ (Knowledge) ขั้นอธิบาย (Comprehension) ขั้นประยุกต์(Application) ขั้นวิเคราะห์ (Analysis) ขั้นสังเคราะห์ (Synthesis) ขั้นประเมิน (Evaluation)ตีพิมพ์ในหนังสือชื่อ The Taxonomy of Education Objectives, The Classification of Educational Goals, Handbook I: Cognitive Domain. ซึ่งนับเป็นหนังสือที่มีอิทธิพลอย่างมากต่อการจัดการศึกษาในช่วงระยะเวลากว่าครึ่งศตวรรษที่ผ่านมา แนวคิดที่บลูมนำเสนอถูกนำไปใช้เป็นมาตรฐานอ้างอิงในการวัดและประเมินผลการเรียนรู้ การพัฒนาหลักสูตร และการจัดการเรียนรู้ของครู เป็นหนึ่งในแนวคิดที่ได้รับการยอมรับอย่างกว้างขวางในฐานะของรูปแบบที่อธิบายถึงความสามารถในการคิดของนักเรียน รายละเอียดเกี่ยวกับระดับการคิดทั้ง 6 แบบ ดังต่อไปนี้

ระดับที่ 1 การรับรู้ (Knowledge) เป็นความสามารถในการจำเทอม ข้อมูล กระบวนการ ความสัมพันธ์และความคิดรวบยอดได้ คำที่บ่งชี้เช่น นิยาม ระบุชื่อ ทำซ้ำ คำถามที่ใช้เช่น จงระบุชื่อของตัวละครในหนังเรื่องนี้

ระดับที่ 2 การเข้าใจ (Comprehension) เป็นความสามารถในการเข้าใจความหมายของสิ่งที่เรียนรู้ สามารถอธิบายได้โดยใช้ภาษาของตนเอง คำที่บ่งชี้เช่น อธิบาย แปลง ถอดความ แปลความ คำถามที่ใช้เช่น อะไรคือความคิดหลัก(Main Idea) ของเรื่องนี้

ระดับที่ 3 การประยุกต์ใช้ (Application) เป็นความสามารถในการใช้สิ่งที่มีอยู่เรียนรู้สิ่งใหม่และนำไปใช้ได้กับสถานการณ์จริง คำที่บ่งชี้เช่น ปรับ สร้าง ตกแต่ง ผลิต คำถามที่ใช้เช่น จงใช้ความรู้เกี่ยวโครงสร้างของเรื่องที่อ่าน เขียนเป็นเรื่องใหม่ตามความคิดของตัวเอง

ระดับที่ 4 การวิเคราะห์ (Analysis) เป็นความสามารถในการเข้าใจส่วนประกอบแต่ละส่วน สามารถแยกแต่ละส่วนออกจากกันได้อย่างมีเหตุผลและรู้ว่าส่วนประกอบทั้งหมดรวมกันอยู่ได้อย่างไร คำที่บ่งชี้เช่น แบ่ง แตก แยก จำแนก หาข้อแตกต่าง คำถามที่ใช้เช่น จงแบ่งเรื่องนี้ออกเป็นตอน ๆ และอธิบายว่าแต่ละตอนสัมพันธ์กันอย่างไร

ระดับที่ 5 การสังเคราะห์ (Synthesis) เป็นความสามารถในการรวบรวมความรู้แนวคิด ความเข้าใจเรื่องต่าง ๆ เป็นหนึ่งเดียว และสร้างเป็นความรู้ใหม่ คำที่บ่งชี้เช่น รวม เชื่อมโยง ประกอบ สร้างใหม่ คำถามที่ใช้เช่น จากเรื่องราวเกี่ยวกับปลาวาฬทั้งสองเรื่องจะสามารถทำนายเกี่ยวกับจำนวนประชากรปลาวาฬในอนาคตได้ว่าอย่างไร

ระดับที่ 6 การประเมิน (Evaluation) เป็นความสามารถในการตัดสินค่าของสิ่งต่างๆ โดยใช้เกณฑ์ที่สมเหตุสมผล คำที่บ่งชี้เช่น ประเมิน ตัดสิน พิสูจน์ คำถามที่ใช้เช่น ในความเห็นของนักเรียนคิดว่างานเขียนเรื่องนี้เป็นงานเขียนที่ดีหรือไม่ เพราะเหตุใด

บลูมอธิบายว่า ขั้นรับรู้ (Knowledge) นักเรียนที่มีความสามารถในการคิดขั้นนี้จะทำได้แค่เพียงระลึกถึงสิ่งที่เหมือนกับที่เคยเรียนรู้มาก่อนได้ ขั้นเข้าใจ (Comprehension) ประกอบด้วยการเข้าใจ (Understanding) 3 แบบ ได้แก่ การแปล (Translation) หมายถึงสามารถแปลข้อมูลจากเรื่องหนึ่งไปสู่อีกเรื่องหนึ่งได้ การตีความ (Interpretation) หมายถึง การสรุปข้อมูล และการจัดลำดับใหม่ได้ การอธิบายอย่างละเอียด (Extrapolation) หมายถึง การขยายข้อมูลที่กำหนดให้ในการกำหนดความหมายโดยนัย ทำนายผล หรือคาดหมายถึงผลกระทบ ขั้นประยุกต์ใช้ (Application) เป็นการประยุกต์ใช้

ความรู้ที่มีลักษณะนามธรรม เช่น กฎ วิธีการ หลักการ สูตร เทคนิค เป็นต้น กับสถานการณ์ที่เฉพาะเจาะจงที่พบใหม่ ขั้นวิเคราะห์ (Analysis) สามารถแบ่งได้เป็น 3 ระดับ ได้แก่ ผู้เรียนสามารถแยกข้อมูลออกเป็นส่วนประกอบต่าง ๆ ได้ ระบุความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละส่วนประกอบได้ และอธิบายได้ว่าแต่ละส่วนประกอบรวมกันเป็นหนึ่งเดียวอย่างไร ขั้นสังเคราะห์(Synthesis) คือความสามารถในการนำข้อมูลจากแหล่งต่าง ๆ มาประกอบกันเพื่อสร้างเป็นโครงสร้างที่มีแบบรูปเป็นหนึ่งเดียว หรือนำความรู้จากส่วนต่าง ๆ ที่กำหนดมาสร้างเป็นความรู้ใหม่ ขั้นประเมิน(Evaluation) เป็นขั้นที่ใช้กระบวนการคิดที่ซับซ้อนที่สุด เป็นขั้นที่ผู้เรียนสามารถตัดสินค่าของสิ่งต่างๆ เช่น แนวคิด วิธีการ ผลงาน ทั้งในเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพโดยใช้เกณฑ์ที่ถูกต้องเหมาะสมและมี ประสิทธิภาพซึ่งอาจเป็นได้ทั้งเกณฑ์ที่ผู้เรียนตั้งขึ้นเองหรือจากที่กำหนดให้

บลูมไม่ได้กล่าวถึงเรื่องของการให้เหตุผลโดยตรง แต่ระดับการคิดในระดับสูงที่บลูมนำเสนอได้แก่ การวิเคราะห์ การสังเคราะห์ และการประเมิน ถือว่าเป็นองค์ประกอบของการให้เหตุผล (Kim. 2005 : 125)

จากความหมายของการให้เหตุผลที่นำเสนอมาจะเห็นว่ามีคำสำคัญที่เกี่ยวข้องกับความหมายของการให้เหตุผลจำแนกได้เป็น 3 กลุ่ม ได้แก่ การคิด ตรรกวิทยา และภาษา ซึ่งทำให้สามารถสรุปความหมายของการให้เหตุผลได้ว่า การให้เหตุผล หมายถึง การอธิบายหรือการแสดงหลักฐานที่ทำให้เราเชื่อในสิ่งใดสิ่งหนึ่งว่าเป็นจริง ซึ่งสร้างขึ้นจากการคิดที่อาศัยหลักตรรกวิทยาแล้วถ่ายทอดออกมาในรูปของภาษา

การให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Reasoning)

ทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นมาตรฐานหนึ่งในมาตรฐานการเรียนรู้ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ซึ่งการจัดการเรียนรู้ให้นักเรียนรู้จักคิดและให้เหตุผลเป็นสิ่งที่สำคัญ ทักษะการให้เหตุผลเป็นการฝึกให้นักเรียนรู้จักคิดและให้เหตุผลอย่างสมเหตุสมผล ดังนั้นทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จึงเกิดการให้เหตุผลของนักเรียนนั่นเอง

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา ได้กำหนดให้การให้เหตุผลและการพิสูจน์ (Reasoning and Proof) เป็นมาตรฐานหนึ่งในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ และกล่าวว่าการให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์จะเป็นแนวทางในการพัฒนาให้เกิดการแสดงออกถึงความเข้าใจอันลึกซึ้งเกี่ยวกับปรากฏการณ์ต่างๆได้ ซึ่งกำหนดมาตรฐานของ

การให้เหตุผลและการพิสูจน์สำหรับนักเรียนในระดับอนุบาลถึงเกรด 12 (NCTM. 2000 : 56 – 57) ดังนี้

1. ตระหนักถึงความสำคัญของการให้เหตุผลและการพิสูจน์ ในฐานะเป็นพื้นฐานของวิชาคณิตศาสตร์

2. สร้างและสำรวจตรวจสอบข้อความคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ได้

3. พัฒนาและประเมินข้อโต้แย้งทางคณิตศาสตร์และพัฒนาการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้

4. เลือกและใช้รูปแบบต่างๆ ของการให้เหตุผลและพิสูจน์ได้

โอ'ดาฟเฟอร์ (O' Daffer. 1990 : 378) ให้ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่า เป็นส่วนหนึ่งของการคิดทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเกี่ยวกับการสร้างหลักการ (กรณีทั่วไป) ซึ่งการสรุปแนวคิดที่สมเหตุสมผล และการหาความสัมพันธ์ของแนวคิดนั้น มีทักษะการให้เหตุผลที่มีความสำคัญต่อความสำเร็จทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนอยู่ 2 ประเภทคือ

1. การให้เหตุผลเชิงอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นกระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นการใช้ข้อมูลที่เกี่ยวกับสมาชิกบางสมาชิกในขอบเขตหนึ่งๆ เพื่อนำไปสู่กรณีทั่วไป หรือนำไปสู่สมาชิกทุกตัวในขอบเขตนั้น

2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นกระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นการใช้ข้อความหรือแบบรูปที่เป็นจริงหรือสมเหตุสมผลอยู่แล้ว เพื่อนำไปสู่ข้อสรุป

ครูลิค และรุดนิกค์ (Krulik and Rudnick. 1993 : 3 – 5) อธิบายการว่าให้เหตุผลและการคิดมีส่วนเกี่ยวข้องกัน โดยท่านได้ให้ความหมายของการคิดว่าเป็นความสามารถของนักเรียนในการได้มาซึ่งข้อสรุปที่สมเหตุสมผลจากข้อมูลที่กำหนดซึ่งนักเรียนต้องสร้างข้อความคาดการณ์หาข้อสรุปจากความสัมพันธ์ในสถานการณ์ปัญหาและแสดงเหตุพร้อมทั้งอธิบายข้อสรุปและยืนยันข้อสรุปนั้นซึ่งข้อสรุปดังกว่าเป็นการนำมารวมกันจนการเป็นความรู้ใหม่

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (NCTM. 2000: 56-57) กล่าวว่าการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ถือเป็นส่วนหนึ่งของการคิดที่สามารถพัฒนาได้ และเป็นพื้นฐานของคณิตศาสตร์ที่ควรส่งเสริมให้นักเรียนเลือกและใช้การให้เหตุผลอย่างหลากหลาย และได้กำหนดมาตรฐานความสามารถในการให้เหตุผลข้อหนึ่งไว้ว่า เป็นความสามารถของนักเรียนในการสร้างข้อคาดการณ์และการตรวจสอบข้อคาดการณ์จากสถานการณ์ที่กำหนด

เพรสเตจ (Prestege. 2002 : 26) กล่าวว่า ความสามารถในการให้เหตุผลคือ การที่นักเรียนสามารถค้นหาคำตอบและตัดสินความถูกต้องได้ รวมถึงการพัฒนาแนวคิดเป็นข้อสรุปทั่วไป การโต้แย้งในการพิสูจน์ ดังนั้น การให้เหตุผลจึงเป็นการหาความเป็นไปได้ของคำตอบและการตัดสินความถูกต้องของคำตอบ

สถาบันส่งเสริมการสอนคณิตศาสตร์และเทคโนโลยี (2547 : 4 – 5) แบ่งการให้เหตุผลออกเป็นสองแบบคือ

1. การให้เหตุผลเชิงอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นการใช้การสังเกตขั้นพื้นฐานเพื่อค้นหาแบบรูป หรือสร้างข้อคาดเดา แล้วสรุปเป็นกรณีทั่วไป

2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นกระบวนการสรุปอย่างสมเหตุสมผลบนพื้นฐานของข้อตกลงหรือกฎ ซึ่งยอมรับว่าเป็นจริงแล้วหรือที่เรียกว่า

บารูดี้ (Barooby. 1993 : 2 – 61) กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ มี 3 ประเภท โดยเพิ่มการให้เหตุผลเชิงหยั่งรู้ (Intuitive Reasoning) ซึ่งเป็นลักษณะของการให้เหตุผลที่เกิดจากการหยั่งรู้ (insight) หรือเกิดจากลางสังหรณ์ ไม่ได้มีข้อมูลที่จำเป็นทั้งหมดในการตัดสินใจ จึงตัดสินใจจากข้อมูลที่เห็น หรือจากความรู้สึกภายใน เหตุผลเชิงหยั่งรู้ จึงเป็นเหตุผลที่วางอยู่บนสิ่งที่ปรากฏหรือข้อสมมติฐาน ซึ่งสิ่งที่ปรากฏอาจถูกหรือผิดก็ได้ ส่วนอีก 2 ประเภทคือ การให้เหตุผลแบบอุปนัยและการให้เหตุผลแบบนิรนัย

ซิกกินส์ (Siggins. 1997 : 64) กล่าวถึงการให้เหตุผลหลัก ๆ 3 แบบได้แก่

1. การให้เหตุผลแบบวิเคราะห์ (Analytical Reasoning) เป็นการให้เหตุผลโดยพิจารณาส่วนย่อยหรือส่วนประกอบ ซึ่งประกอบกันเป็นสิ่งนั้นๆ เป็นการศึกษาลงในส่วนย่อยๆ เมื่อต้องการศึกษาสิ่งนั้นอย่างลึกซึ้ง ก็ใช้การวิเคราะห์เพื่อศึกษารายละเอียด หรือในกรณีที่ต้องการแก้ปัญหา นักเรียนจะต้องอาศัยการวิเคราะห์สถานการณ์หรือปัญหา แล้วนำความรู้และการให้เหตุผลมาใช้ในการแก้ปัญหานั้นๆ

2. การให้เหตุผลแบบเปรียบเทียบ (Comparative Reasoning) เป็นกระบวนการศึกษาว่าสิ่งนั้นๆ มีอะไรที่เหมือนกัน มีอะไรที่ต่างกัน ในบางโอกาสเราต้องศึกษาส่วนที่แตกต่างกัน บางโอกาสเราต้องศึกษาส่วนที่เหมือนกัน การให้เหตุผลวิธีนี้จะต้องมีความรู้ความเข้าใจในสิ่งที่ต้องการเปรียบเทียบอย่างลึกซึ้ง มีข้อตกลงอย่างชัดเจนว่าอย่างไรถือว่าต่างกันก่อนที่จะทำการเปรียบเทียบ

3. การให้เหตุผลในการประเมิน (Evaluative Reasoning) เป็นการใช้เหตุผลประเมินเมื่อเราตัดสินคุณค่าหรือความถูกต้องโดยใช้เหตุผล อาศัยความสมเหตุสมผลเป็นเครื่องตัดสิน

ลอง และดีเทมเปิ้ล (Long and Detemple. 2006: 51) ได้กล่าวถึงการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่าการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นการคิดวิเคราะห์ ซึ่งประกอบไปด้วยการให้เหตุผลแบบนิรนัยการให้เหตุผลเกี่ยวกับการนำเสนอเหตุการณ์ทางคณิตศาสตร์และการให้เหตุผลแบบอุปนัย

โอ'ดาฟเฟอร์ และทอร์นควิสต์ (O' Daffer and Thornquist. 1993 : 43) กล่าวว่า การให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์เป็นส่วนหนึ่งของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย การสร้างกรณีทั่วไป และการสร้างข้อสรุปที่สมเหตุสมผลเกี่ยวกับแนวคิดทางคณิตศาสตร์เรื่องต่าง ๆ

สมาคมนานาชาติเพื่อการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการศึกษา (The International Association for the Evaluation of Educational Achievement [IEA]. 2003 : 32) ได้กำหนดนิยามของการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ว่าประกอบด้วยความสามารถในการคิดอย่างเป็นระบบและมีเหตุผล เพื่อหาคำตอบของปัญหาที่ผู้เรียนไม่เคยเผชิญมาก่อน (Non-routine Problem) ซึ่งอาจเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์หรือปัญหาในชีวิตประจำวันที่ผู้เรียนต้องแปลงความรู้และทักษะที่มีอยู่เพื่อใช้กับสถานการณ์ใหม่ โดยได้นำเสนอกรอบแนวคิดในการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียนด้านต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1. การสร้างสมมุติฐาน/ข้อคาดเดา/การทำนาย (Hypothesize /Conjecture/Predict) คือ ความสามารถในการตั้งข้อคาดเดาที่เหมาะสมจากการที่ได้สำรวจแบบรูป อภิปรายแนวคิด สร้างแบบจำลอง หรือทดสอบเซตของข้อมูล เป็นต้น

2. การวิเคราะห์ (Analyze) คือ ความสามารถในการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรหรือสิ่งต่าง ๆ ในสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์

3. การประเมิน (Evaluate) คือ ความสามารถในการวิจารณ์และประเมินแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ข้อคาดเดา วิธีการแก้ปัญหา และการพิสูจน์ เป็นต้น

4. การสร้างกรณีทั่วไป (Generalize) คือ ความสามารถในการขยายผลของความคิดทางคณิตศาสตร์ และผลการแก้ปัญหาเดิมไปสู่การได้ผลลัพธ์ใหม่ที่มีความเป็นกรณีทั่วไปและใช้ได้กว้างขวางขึ้น เช่น กำหนดแบบรูป 1, 4, 7, 10, … แล้วให้หาความสัมพันธ์ระหว่างเทอมที่อยู่ติดกันแล้วนำผลที่ได้ไปช่วยในการคำนวณหาเทอมที่อยู่หลัง 61 เป็นต้น

5. การเชื่อมโยง (Connect) คือ ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้เดิมที่มีอยู่กับความรู้ใหม่ เชื่อมโยงระหว่างความคิดทางคณิตศาสตร์แต่ละเรื่อง เชื่อมโยงความรู้และรูปแบบการนำเสนอในลักษณะต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง เช่น กำหนดรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็น 3 4 และ 5 เซนติเมตร แล้วให้หาว่ารูปสามเหลี่ยมดังกล่าวมีพื้นที่เป็นเท่าใด ซึ่งนักเรียนต้องเชื่อมโยงความรู้เกี่ยวกับสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเข้ามาช่วยในการหาพื้นที่ เป็นต้น

6. การสังเคราะห์ (Synthesize/Integrate) คือ ความสามารถในการรวมกระบวนการทางคณิตศาสตร์เพื่อสร้างผลสรุป และรวบรวมผลสรุปต่าง ๆ เพื่อสร้างผลสรุปใหม่ เช่น การใช้ข้อมูลจากการวิเคราะห์ตารางเพื่อนำไปใช้แก้ปัญหา หรือ การอาศัยข้อมูลที่เหมือนกันของกราฟสองกราฟเพื่อใช้ในการแก้ปัญหา เป็นต้น

7. การแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย (Solve Non-routine Problems) คือ ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หรือปัญหาในสถานการณ์จริงที่นักเรียนไม่เคยเผชิญมาก่อน และความสามารถในการประยุกต์ใช้ขั้นตอนวิธีทางคณิตศาสตร์ในบริบทที่แตกต่างจากที่เคยใช้ (Unfamiliar Context)

8. การพิสูจน์ (Justify/Prove) คือ ความสามารถในการใช้สมบัติทางคณิตศาสตร์ยืนยันว่าประโยคใดเป็นจริงหรือเท็จภายใต้ข้อมูลที่กำหนดให้ เช่น จงแสดงว่าผลบวกของจำนวนคี่สองจำนวนได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนคู่เสมอ

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM. 2000 : 124) ได้กำหนดมาตรฐานในส่วนของการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ว่า ในการจัดการศึกษาตั้งแต่ระดับก่อนอนุบาลถึงมัธยมศึกษาตอนปลายต้องเน้นการพัฒนาให้นักเรียนมีความสามารถดังต่อไปนี้

1. เห็นคุณค่าของการให้เหตุผลว่าเป็นลักษณะพื้นฐานของวิชาคณิตศาสตร์ กล่าวคือ ในการจัดการเรียนรู้ต้องมุ่งให้นักเรียนมีความเข้าใจว่าการยืนยันเรื่องใด ๆ ต้องมีเหตุผลที่เหมาะสมมารองรับเสมอ ประโยค (Statement) จำเป็นต้องมีหลักฐานมาสนับสนุนว่าเป็นจริง หรือมีตัวอย่างมาค้านว่าเป็นเท็จ การเสนอความคิดใดออกมานักเรียนต้องสามารถตอบได้ว่า ทำไมถึงคิดอย่างนั้นทำไมถึงคิดว่าเป็นสิ่งที่ถูกต้อง

2. สร้างและตรวจสอบข้อคาดเดาทางคณิตศาสตร์ กล่าวคือ นักเรียนจะต้องเรียนรู้การสร้างพัฒนา ค้นหา และตรวจสอบข้อคาดเดาตั้งแต่ระดับประถมศึกษา เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับการค้นพบ และข้อคาดเดาก็คือเส้นทางไปสู่การ

ค้นพบ นอกจากนี้นักเรียนต้องถูกฝึกให้คุ้นเคยกับคำถามที่เกี่ยวกับการค้นหาแบบรูป ว่าแบบรูปนี้มีลักษณะอย่างไร เทอมต่อไปคืออะไร แบบรูปนี้เป็นจริงตลอดหรือเป็นบางครั้ง

3. พัฒนาและประเมินการให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ กล่าวคือ ต้องให้นักเรียนเรียนรู้การให้เหตุผลเพื่อยืนยันหรือปฏิเสธข้อคาดเดาที่มีความเป็นกรณีทั่วไปได้ เช่น เด็กในระดับประถมศึกษาตอนต้นต้องสามารถยืนยันความจริงในกรณีทั่วไปโดยใช้ความรู้จากกรณีเฉพาะ ได้จากการที่นักเรียนสามารถแสดงได้ว่า 9 เป็นจำนวนคี่ โดยการจับคู่ทีละสองแล้วเหลือเศษหนึ่งทำให้เขาสามารถให้เหตุผลได้ว่าจำนวนคี่ทุกจำนวนเมื่อจับคู่ทีละสองแล้วต้องเหลือเศษหนึ่งเสมอ เด็กในระดับประถมศึกษาตอนปลายต้องสามารถสร้างการให้เหตุผลของสถานการณ์ปัญหาโดยอาศัยความรู้คณิตศาสตร์อื่น ๆ เช่น ใช้ความรู้ที่ว่ารูปสองรูปที่เท่ากันทุกประการต้องมีพื้นที่เท่ากัน มาให้เหตุผลว่ารูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมมีพื้นที่เท่ากันเพราะทั้งคู่มีพื้นที่เป็นครึ่งหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมรูปเดียวกัน เป็นต้น นอกจากนี้ยังต้องส่งเสริมให้เด็กได้เรียนรู้การตรวจสอบข้อบกพร่องของการให้เหตุผล ซึ่งอาจทำได้โดยการให้เด็กอภิปรายร่วมกับเพื่อนร่วมชั้นเพื่อเปรียบเทียบความคิดของตนเองกับความคิดของคนอื่น ๆ ส่งผลให้เขาได้ปรับปรุงให้เหตุผลของตนมีความน่าเชื่อถือมากยิ่งขึ้น ชั้นเรียนที่มีการกระตุ้นให้นักเรียนนำเสนอความคิดของตัวเองและรับฟังข้อเสนอแนะจากคนอื่น เป็นชั้นเรียนที่เต็มไปด้วยบรรยากาศที่เหมาะสำหรับการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์อย่างยิ่ง ลักษณะการนำเสนอเหตุผลของเด็กเล็กจะอธิบายโดยใช้ภาษาของตนเอง หรืออาจใช้อุปกรณ์ แต่สำหรับเด็กโตเขาสามารถที่จะนำเสนอการให้เหตุผลโดยใช้รูปแบบการเขียนที่สามารถยอมรับได้โดยผู้เชี่ยวชาญ แต่สิ่งสำคัญก็คือครูต้องตระหนักว่ารูปแบบการเขียนพิสูจน์มีความสำคัญน้อยกว่าการคิดและการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องและชัดเจน

4. เลือกและใช้วิธีการและรูปแบบต่าง ๆ ของการให้เหตุผลและการพิสูจน์ กล่าวคือนักเรียนจะต้องได้รับการฝึกให้รู้ว่าจะใช้ความรู้และข้อมูลที่มีอยู่สร้างการให้เหตุผลที่ชัดเจนได้อย่างไร ต้องเรียนรู้เกี่ยวกับมาตรฐานในการให้เหตุผล และประเภทของการให้เหตุผลแบบต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นแบบลองผิดลองถูก การพิสูจน์แบบหาข้อขัดแย้ง แบบอุปนัยและแบบนิรนัย เป็นต้น ว่าจะเลือกใช้รูปแบบใดของการพิสูจน์ที่เหมาะกับแต่ละกรณี

เบกก์ (Begg. 1994 : 183 – 192) เสนอว่าความสามารถในการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ ควรประกอบด้วยความสามารถด้านต่าง ๆ ต่อไปนี้

1. การจำแนกและการอธิบาย ประกอบด้วย การจำแนกประเภทของสิ่งต่าง ๆ การอธิบายถึงสิ่งต่างๆ อย่างชัดเจน

2. การให้เหตุผล ประกอบด้วย การสร้างข้อสรุปที่มีเหตุผล ใช้แบบจำลองข้อมูล สมบัติและความสัมพันธ์ เพื่อสร้างเป็นเหตุผล การพิสูจน์คำตอบและกระบวนการ การใช้แบบรูปและความสัมพันธ์เพื่อวิเคราะห์สถานการณ์ การให้เหตุผลโดยใช้กราฟและการนำเสนอด้วยกราฟ ติดตามการให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ ตัดสินความสมเหตุสมผลของการให้เหตุผล สร้างการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลแบบง่าย ๆ เข้าใจและประยุกต์ใช้การให้เหตุผลแบบนิรนัย เข้าใจและประยุกต์ใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัย การยกตัวอย่างค้าน และการยอมรับว่าการให้เหตุผลคือส่วนหนึ่งของคณิตศาสตร์

3. การสรุปอ้างอิง ประกอบด้วยการสร้างและประเมินข้อคาดเดาทางคณิตศาสตร์ การสร้างกรณีทั่วไป การตัดสินใจที่เหมาะสมและเชื่อถือได้

4. การพิสูจน์ ประกอบด้วย การยอมรับธรรมชาติของระบบสัจพจน์ในทางคณิตศาสตร์ การสร้างการพิสูจน์ ทั้งการพิสูจน์ทางอ้อม และการพิสูจน์โดยวิธีอุปนัย (Deductive Reasoning) แต่อย่างไรก็ตาม บารูดี้แนะนำว่าในการจัดหลักสูตรเพื่อเน้นการพัฒนาให้ผู้เรียนมีทักษะในการให้เหตุผลนั้นควรเน้นในเรื่องของการแยกและจำแนกประเภทของสิ่งต่าง ๆ การสำรวจแบบรูปซึ่งส่งเสริมความสามารถในการวิเคราะห์ และการประเมินการให้เหตุผล ข้อคาดเดา และข้อสรุปว่ามีความสมเหตุสมผลหรือไม่ เพิ่มเติมเข้ามาอีกส่วนหนึ่ง

จากที่กล่าวมาจะเห็นว่าแนวคิดเกี่ยวกับการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์และการให้เหตุผลโดยทั่วไปจะมีความใกล้เคียงกัน กล่าวคือ การให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์สามารถพิจารณาได้ว่าเป็นส่วนหนึ่งของการให้เหตุผล เพราะองค์ประกอบต่าง ๆ ของการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์สามารถจำแนกออกได้เป็น 3 ส่วน ตามองค์ประกอบของการให้เหตุผล ดังแสดงในตารางที่ 2 ดังนี้

ตารางที่ 2 เปรียบเทียบองค์ประกอบของการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์

ชื่อนักการศึกษาหรือองค์กร	**องค์ประกอบของการให้เหตุผล**		
	การวิเคราะห์	**การสรุปอ้างอิง**	**การประเมิน**
TIMSS	การวิเคราะห์	1. การสร้างข้อคาดการณ์ 2. การสร้างกรณีทั่วไป 3. การเชื่อมโยง 4. การสังเคราะห์ 5. การแก้ปัญหา 6. การพิสูจน์	การประเมิน
NCTM		1. การสร้างข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ 2. การพัฒนาการให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 3. การใช้การให้เหตุผลและการพิสูจน์รูปแบบต่าง ๆ	1. การตรวจสอบข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ 2. การประเมินการให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์
Begg	1. การจำแนกและการอธิบาย 2. การวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา	1. การสร้างข้อสรุปที่มีเหตุผล 2. การสร้างการให้เหตุผล 3. การใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัย นิรนัย 4. การสร้างข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ 5. การสร้างกรณีทั่วไป 6. การสร้างการพิสูจน์	1. การพิสูจน์คำตอบและกระบวนการ 2. การตัดสินความสมเหตุสมผลของการให้เหตุผล 3. การประเมินข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์
Baroody	ความสามารถในการวิเคราะห์	1. การให้เหตุผลเชิงประจักษ์ 2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย 4. การให้เหตุผลแบบอุปนัย	3. ความสามารถในการประเมินการให้เหตุผล ข้อคาดการณ์และข้อสรุป

จากที่กล่าวมา สรุปได้ว่า การให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์เป็นการผนวกความหมายของการให้เหตุผลเข้ากับเนื้อหาคณิตศาสตร์สาขาต่าง ๆ เช่น การให้เหตุผลเชิงเรขาคณิต การให้เหตุผลเชิงสถิติ และการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต เป็นต้น

การให้เหตุผลเชิงพีชคณิต (Algebraic Reasoning)

การให้เหตุผลเชิงพีชคณิต เป็นการให้เหตุผลเชิงเกี่ยวกับเนื้อหาพีชคณิต ซึ่งมีนักการศึกษาและหน่วยงานที่เกี่ยวข้องกล่าวถึงประเด็นที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต ดังนี้

พีชคณิต

เมื่อกล่าวถึงพีชคณิตคนส่วนใหญ่จะเข้าใจว่าเป็นวิชาที่ว่าด้วยการแก้สมการที่ซับซ้อนหรือการดำเนินการเกี่ยวกับนิพจน์ และจะต้องเกี่ยวข้องกับเรื่องของตัวแปร ซึ่งส่วนดังกล่าวเป็นเพียงส่วนปลายของพีชคณิตที่ต้องผ่านขั้นตอนอื่นมาก่อนไม่ใช่ทั้งหมด (NCTM. 2000 : 37) พีชคณิตจึงไม่ใช่เป็นเพียงวิชาที่ว่าด้วยศาสตร์แห่งการแก้สมการและการดำเนินการเกี่ยวกับตัวแปรเพียงส่วนเดียว ซึ่งมีนักคณิตศาสตรศึกษาและหน่วยงานที่เกี่ยวข้องได้นำเสนอเกี่ยวกับความหมายของพีชคณิตไว้ ดังนี้

สารานุกรมไทยสำหรับเยาวชนฯ เล่ม 6 (2530 : 70) นำเสนอเกี่ยวกับพีชคณิตว่า พีชคณิตเป็นแขนงหนึ่งของคณิตศาสตร์ กล่าวถึงจำนวนในลักษณะต่างไปจากเลขคณิต พีชคณิตใช้ตัวอักษร เช่น x และ y แทนจำนวนที่ยังไม่รู้ค่า เพื่อช่วยทำโจทย์เลขคณิตที่ยุ่งยากได้โดยง่าย พีชคณิตมีประโยชน์มากทั้งในด้านธุรกิจอุตสาหกรรมและวิทยาศาสตร์

ยุพร ริมชลการ (2543 : 54 – 56) ได้ให้ความหมายของพีชคณิตว่า พีชคณิต (Algebra) เป็นคณิตศาสตร์สาขาหนึ่ง ซึ่งพัฒนาโดยตรงจากเลขคณิตโดยใช้สัญลักษณ์แทนตัวแปร ต่อจากนั้นได้พัฒนาในแง่เป็นกรณีทั่วไปของเลขคณิต และในที่สุดได้พัฒนาในเชิงนามธรรม เนื่องจากพีชคณิตมีลักษณะของความเป็นนามธรรมสูง จึงต้องใช้สัญลักษณ์ต่าง ๆ แทน ตัวแปร การจัดการเรียนการสอนจึงควรให้มีการบูรณาการกับคณิตศาสตร์สาขาอื่น เพื่อประโยชน์ในด้านการทำความเข้าใจสาระทางพีชคณิตและใช้พีชคณิตสำหรับเรียนรู้คณิตศาสตร์แขนงอื่น

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน. (2548 : 6) ได้เสนอความหมายของพีชคณิตไว้ว่า พีชคณิตเป็นวิชาหนึ่งของคณิตศาสตร์เช่นเดียวกับ เลขคณิต เรขาคณิต หรือตรีโกณมิติ แต่พีชคณิตเป็นวิชาที่ว่าด้วยการแก้โจทย์ปัญหาด้วย

กระบวนการที่อาจสร้างขึ้นในรูปของนิพจน์ หรือฟังก์ชันที่มีตัวแปรหรือตัวที่ยังไม่กำหนด ตั้งแต่ 1 ตัวขึ้นไป ซึ่งเรียกว่าสัญลักษณ์ และเพราะเราอาจแทนสัญลักษณ์เหล่านี้เป็นอะไรก็ได้เช่น เป็นฟังก์ชันต่าง ๆ เป็นเวคเตอร์ เป็นจำนวนจริง หรือเป็นจำนวนเชิงซ้อน วิธีการทางคณิตศาสตร์จึงสามารถแก้โจทย์ปัญหาได้ครอบคลุมเกือบทุกแขนงวิชา ทำให้พีชคณิตเป็นวิชาที่จำเป็นต้องศึกษา โดยแทรกอยู่ในทุกแขนงวิชาที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ ตัวอย่างเช่นกระบวนการหาคำตอบของระบบสมการของเกาส์ หรืออุปนัยวิธีทางคณิตศาสตร์ในวิชาตรรกศาสตร์ เหล่านี้ล้วนเป็นวิธีทางพีชคณิตทั้งสิ้น จึงมีคำกล่าวว่า "พีชคณิตเป็นศูนย์กลางทางคณิตศาสตร์ทั้งปวง"

คริสต์มาส (Chirstmas and Fey. 1999 : 5 – 13) ให้มุมมองว่าพีชคณิตควรประกอบด้วยสองส่วนคือ ส่วนของเนื้อหา ได้แก่ เรื่องตัวแปร ฟังก์ชัน กราฟ สมการและอสมการ และส่วนของสมบัติ ได้แก่ สมบัติของจำนวนจริงและสับเซตของจำนวนจริง ทั้งสองส่วนนี้ประกอบกันจะเกิดเป็นระบบสัญลักษณ์ที่สามารถนำไปใช้อธิบายและสรุปความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณต่าง ๆ ได้

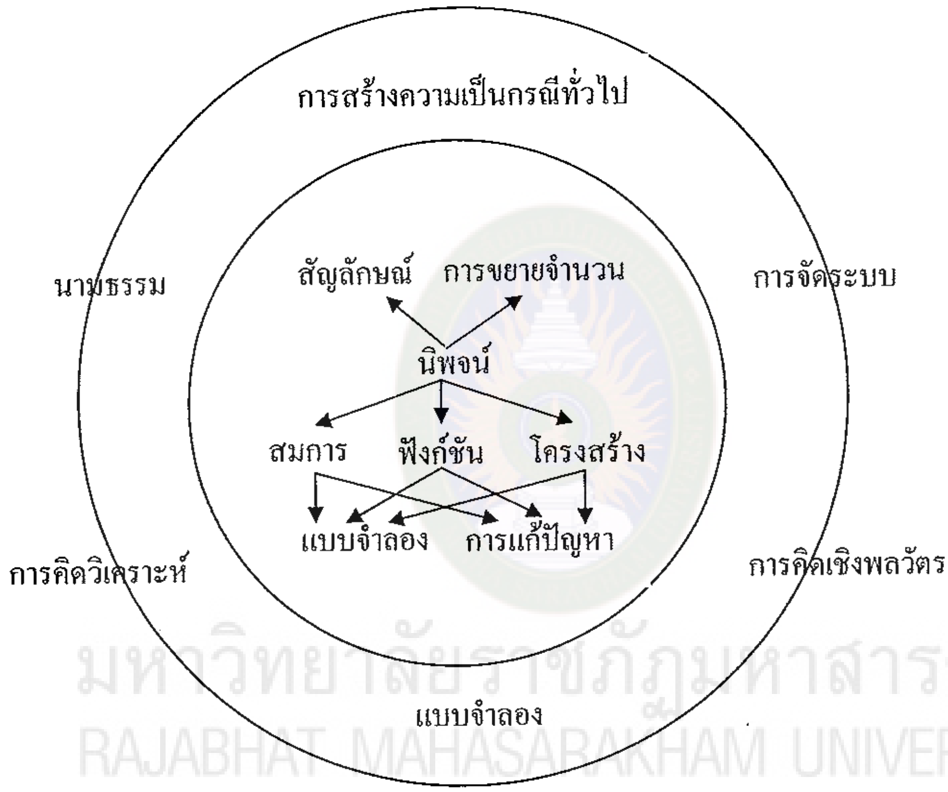
กรีนและฟินเดลล์ (Greenes and Findell. 1999 : 127) มีมุมมองว่าแนวคิดหลักทางพีชคณิตควรประกอบด้วย การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัย การนำเสนอ สมการ ตัวแปร ฟังก์ชัน และสัดส่วน

ยูซิสกิน (Usiskin. 1999 : 5 – 13) มีมุมมองว่าพีชคณิตคือภาษาของวิชาคณิตศาสตร์เป็นภาษาแทนกรณีทั่วไปของเลขคณิต และเป็นภาษาที่มีลักษณะพิเศษเฉพาะที่เกี่ยวข้องกับตัวไม่ทราบค่า สูตร กรณีทั่วไป การแทนค่า และความสัมพันธ์ เป็นต้น

กาพุท (Kaput. 1999 : 142) มองพีชคณิตในแง่ของการใช้เป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา ได้แก่การวิเคราะห์ข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาและการนำเสนอข้อมูลในรูปของการอธิบายและการหาคำตอบ เช่น การหาตัวไม่ทราบค่า การทดสอบข้อคาดเดาหรือการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณ เป็นต้น

ลิว (Lew. 2004 : 88 – 95) มีทัศนะว่าพีชคณิตคือวิชาที่เกี่ยวข้องกับนิพจน์ สัญลักษณ์ และการขยายจำนวนที่นอกเหนือไปจากจำนวนนับ เพื่อหาคำตอบของสมการ เพื่อวิเคราะห์ความสัมพันธ์และเพื่อกำหนดโครงสร้างของระบบการนำเสนอซึ่งประกอบด้วยนิพจน์และความสัมพันธ์ แต่อย่างไรก็ตามการแก้สมการ การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ และการกำหนดโครงสร้างดังกล่าวไม่ใช่เป้าหมายของพีชคณิต แต่เป็นเพียงเครื่องมือในการจำลองปรากฏการณ์หรือสถานการณ์ในโลกแห่งความเป็นจริงเพื่อการอธิบายและแก้ปัญหาของแต่

ละบริบท ยิ่งไปกว่านั้นพีชคณิตไม่ใช่เป็นเพียงเซตของความรู้และเทคนิควิธีเท่านั้น แต่ยังรวมถึงวิธีการคิด (A Way of Thinking) อีกด้วย ความสำเร็จในการเรียนรู้พีชคณิตขึ้นอยู่กับความสามารถในการคิด 6 ชนิด ได้แก่ การคิดหากรณีทั่วไป การคิดเชิงนามธรรม การคิดวิเคราะห์ การคิดสร้างสรรค์ การคิดหาแบบจำลอง และการจัดระบบ ดังแสดงในแผนภาพที่ 3 ดังนี้



แผนภาพที่ 3 องค์ประกอบของพีชคณิตตามแนวคิดของลิว

โทเบย์ (Tobey. 1991 : 125) กล่าวถึงพีชคณิตว่า พีชคณิต (algebra) เป็นสาขาหนึ่งในสามสาขาหลักในคณิตศาสตร์ร่วมกับเรขาคณิต และการวิเคราะห์ (analysis) พีชคณิตเป็นการศึกษาเกี่ยวกับโครงสร้าง ความสัมพันธ์ และจำนวน พีชคณิตพื้นฐานจะเริ่มมีสอนในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษา โดยศึกษาเกี่ยวกับการบวก ลบ คูณ และหาร ยกกำลัง และการถอดราก พีชคณิตยังคงรวมไปถึงการศึกษาสัญลักษณ์ ตัวแปร และเซ็ต

สารานุกรมคณิตศาสตร์ (ENCYCLOPAEDIA MATHEMATICS; Volume 1. 1995 : 72) ได้เสนอเกี่ยวกับพีชคณิตว่า พีชคณิตเป็นสาขาหนึ่งของวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งทำการศึกษาเกี่ยวกับการดำเนินการทางพีชคณิต

จากที่กล่าวมา สรุปได้ว่า พีชคณิต หมายถึง วิชาที่เกี่ยวข้องกับลักษณะที่เป็นนามธรรมหรือกรณีทั่วไปของเลขคณิต เป็นภาษาของวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งจะเกี่ยวข้องกับเรื่องตัวแปร นิพจน์ และโครงสร้างของการใช้สัญลักษณ์ ว่าด้วยเรื่องฟังก์ชัน ความสัมพันธ์ และการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา ซึ่งจะเกี่ยวข้องกับการค้นหาแบบรูปของสิ่งต่าง ๆ การนำเสนอความคิดในรูปของสมการ ตาราง และกราฟและการแก้สมการเพื่อหาคำอธิบายของสถานการณ์

การให้เหตุผลเชิงพีชคณิต

ยาคเกิ้ล (Yackel. 1997 : 276 – 280) กล่าวถึงการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตว่าเป็นการให้เหตุผลที่นอกเหนือไปจากการให้เหตุผลเชิงตัวเลข (Numerical Reasoning) หรือการให้เหตุผลที่เป็นเพียงการยกตัวอย่างในกรณีเฉพาะ แต่เป็นการให้เหตุผลที่มีความเป็นกรณีทั่วไป (General Reasoning) เกี่ยวกับความสัมพันธ์และวิธีการใช้สัญลักษณ์ในการนำเสนอความคิด

คาร์เพนเตอร์ และเลวิ (Carpenter and Levi. 2000 : 1–18) เสนอว่าการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต เป็นการให้เหตุผลที่เกิดจากการคิดในเชิงของความสัมพันธ์ (Relational Thinking)และการคิดในเชิงนามธรรม (Abstract Though) ซึ่งแสดงออกมาในรูปของภาษาของนักเรียนเองหรือการใช้สัญลักษณ์ในการอธิบายความสัมพันธ์และความเป็นกรณีทั่วไป

ศูนย์คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์แห่งชาติอเมริกา (Nation Center for Mathematics and Science. 2005 : ออนไลน์) กล่าวถึงการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตว่ามีหลายรูปแบบ เช่น จากการหาผลบวกของ 5+7=12, 3+7=10, 1+11=12 เป็นต้น แล้วสามารถตั้งข้อคาดการณ์ที่เป็นกรณีทั่วไปได้ว่า ผลบวกของจำนวนคี่สองจำนวนจะได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนคู่ หรือจะกล่าวว่านักเรียนมีการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเมื่อสามารถใช้เครื่องหมายเท่ากับในความหมายของเครื่องหมายที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณแทนที่จะมองแค่ว่าเป็นเครื่องหมายที่แทนการคำนวณ เป็นต้น

จากที่กล่าวมา สรุปได้ว่า การให้เหตุผลเชิงพีชคณิต หมายถึง การอธิบายหรือการใช้หลักฐานอ้างอิงในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปของสถานการณ์ปัญหาเชิงพีชคณิตของนักเรียน โดยสร้างขึ้นจากการคิดที่อาศัยหลักตรรกศาสตร์แล้วถ่ายทอดออกมาในรูปประโยคข้อความภาษาหรือสัญลักษณ์ทางพีชคณิต

ความสามารถในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต

แนวคิดเกี่ยวกับความสามารถในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต สามารถนำเสนอประเด็นต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องดังนี้

ความสามารถ

มีนักการศึกษาและองค์กรที่เกี่ยวข้องได้ให้ความหมายความสามารถไว้ดังนี้

เปลื้อง ณ นคร (2555 : ออนไลน์) เสนอว่า ความสามารถหมายถึงความเชี่ยวชาญสันทัด ทำอะไรได้สำเร็จ

ยาฮู รอบรู้ประเทศไทย (2009 : ออนไลน์) เสนอว่า ความสามารถ หมายถึง การแสดงออกถึงการกระทำอย่างใดอย่างออกมาที่สูงกว่าเกณฑ์เฉลี่ยหรือมาตรฐานทั่วไป อาจเกิดขึ้นได้จากการเรียนรู้ฝึกฝน จนกลายเป็นทักษะ / ความชำนาญ

พจนานุกรมฉบับราชบัณฑิตยสถาน 2542 (2555 : ออนไลน์) กล่าวว่า ความสามารถหมายถึง คุณสมบัติที่จะกระทำการใดๆ ได้หรือสูงกว่าเกณฑ์เฉลี่ยหรือมาตรฐานโดยทั่วไป

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า ความสามารถ หมายถึง การแสดงออกถึงการกระทำอย่างใดอย่างหนึ่งออกมาซึ่งบ่งบอกถึงคุณสมบัติที่จะทำได้หรือสูงกว่าเกณฑ์เฉลี่ยหรือมาตรฐานทั่วไป อาจ เกิดขึ้นได้จากการเรียนรู้ฝึกฝน จนกลายเป็นทักษะ / ความชำนาญ

การสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต

กรณีทั่วไป เป็นลักษณะความรู้ที่อยู่ในรูปกฎเกณฑ์หรือหลักการทั่วไป ซึ่งความรู้ดังกล่าวสามารถนำไปใช้ได้ในทุกกรณี (พจนานุกรมคณิตศาสตร์ฉบับราชบัณฑิตยสถาน พ.ศ. 2545. 2545 : 59)

กรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต เป็นลักษณะความรู้ทางพีชคณิตที่อยู่ในรูปกฎเกณฑ์หรือหลักการทั่วไปที่แสดงถึงความสัมพันธ์ของตัวแปร หรือจำนวน ซึ่งความรู้ดังกล่าวสามารถนำไปใช้ได้ในทุกกรณี (สารานุกรมเสรี. 2555 : ออนไลน์)

การสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเป็นองค์ประกอบและเป้าหมายที่สำคัญของการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (Townsend. 2005 : 27) มีนักคณิตศาสตรศึกษาหลายท่านได้เสนอแนวคิดเกี่ยวกับการสร้างความเป็นกรณีทั่วไป ดังนี้

ความหมายของการสร้างความเป็นกรณีทั่วไป

มีนักคณิตศาสตรศึกษาได้ให้ความหมายของการสร้างความเป็นกรณีทั่วไป ดังนี้

มาสัน (Mason. 1996 : 65) กล่าวว่าว่า การสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเป็นสิ่งที่มีความสำคัญต่อการคิดทางคณิตศาสตร์ ถ้านักเรียนไม่สามารถที่จะสร้างความเป็นกรณีทั่วไปของตนเองได้ ความคิดทางคณิตศาสตร์ก็จะเกิดขึ้นไม่ได้เช่นกัน

กาพุท (Kaput. 1999 : 138) กล่าวว่า การสร้างความเป็นกรณีทั่วไป (Generalization) ทางคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการที่เกี่ยวข้องกับการขยายขอบเขตของความเป็นกรณีเฉพาะและการค้นหาลักษณะร่วมของทั่วทุกกรณี เพื่อสร้างข้อตกลงร่วมกันเป็นกรณีทั่ว ๆ ไปอย่างความหมาย เช่น แบบรูปและโครงสร้าง และการระบุและแสดงให้เห็นความสัมพันธ์เหล่านี้ และยังลักษณะของการเข้าร่วมกิจกรรมอย่างใดอย่างหนึ่งในสามกิจกรรมดังนี้

1. ระบุลักษณะร่วมของกรณีทั่วทุกกรณี
2. การขยายเหตุผลกว้างกว่าของเขตที่เป็นจุดเริ่มต้น
3. ได้รับผลลัพธ์ที่ขยายจากกรณีเฉพาะ

คาร์เพนเตอร์และแฟรงค์ (Carpenter and Frank. 2001 : 221) กล่าวว่า การสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเป็นกฎทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับความสัมพันธ์หรือสมบัติของความรู้ทางคณิตศาสตร์

ซาซคิส และ ลิลจี้ (Zazkis and Liljea. 2002 : 381) กล่าวว่า การสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเป็นทั้งสิ่งใดสิ่งหนึ่ง (An Object) และวิธีการคิดและการสื่อสาร และ อธิบายต่อว่า การสร้างความเป็นกรณีทั่วไปถูกสร้างผ่านสิ่งที่เป็นนามธรรมของสิ่งที่จำเป็นคุณสมบัติของสิ่งที่เป็นนามธรรมนั้นเป็นความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งต่างๆมากกว่าเป็นความสัมพันธ์เฉพาะตัวของมันเอง

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า การสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต หมายถึง การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ คุณลักษณะร่วมของทุกเหตุการณ์ แล้วขยายขอบเขตไปสู่ข้อสรุปในรูปของกรณีทั่วไปของปัญหาเชิงพีชคณิต เช่น กฎ โครงสร้าง และแบบรูป โดยในการวิจัยครั้งนี้เลือกใช้สถานการณ์ปัญหาที่เกี่ยวกับแบบรูปและความสัมพันธ์ เนื้อหาทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับ สมการเชิงเส้น และเลขยกกำลัง ในการสร้างสถานการณ์ปัญหาที่นำไปสู่การสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิตของนักเรียน

จากความสามารถและการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต สรุปได้ว่า ความสามารถในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิตที่มีความถูกต้อง/เหมาะสม/เชื่อถือได้ตามหลักวิชาด้วยกลวิธีที่ใช้ในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิตอย่างยืดหยุ่น

ประเภทของการสร้างความเป็นกรณีทั่วไป

นักการศึกษาได้จำแนกประเภทของการสร้างความเป็นกรณีทั่วไป ที่แตกต่างกันดังนี้

ฮาเรล และ ทอลล์ (Harel and Tall. 1991: 38 – 42) ให้กรอบสำหรับการจำแนกประเภทของการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปของผู้ใช้แต่ละคน มีดังนี้

1. การสร้างความเป็นกรณีทั่วไปแบบขยาย ซึ่งผู้เรียนจะขยายความสิ่งที่สามารถประยุกต์ใช้ได้จากแบบแผนที่มีอยู่ โดยไม่ต้องนำกลับมาสร้างขึ้นใหม่
2. การสร้างความเป็นกรณีทั่วไปแบบนำกลับมาสร้างใหม่ ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อผู้เรียนสร้าง แบบแผนที่มีอยู่ เพื่อที่จะขยายช่วงของการนำไปประยุกต์ใช้
3. การสร้างความเป็นกรณีทั่วไปแบบแยกแยะ ซึ่งผู้เรียนสร้างแบบแผนขึ้นมาใหม่ เพื่อจัดการกับข้อมูลใหม่ที่รับเข้ามา

การสร้างความเป็นกรณีทั่วไปแบบขยายออกและแบบนำกลับมาสร้างใหม่ต้องใช้ผู้เรียนในการขยายหรือปรับเปลี่ยนแบบแผนก่อนหน้านี้ ขณะที่การสสร้างความเป็นกรณีทั่วไปแบบแยกออกต้องใช้หลักการของกลุ่มเพียเจต์ในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไป เช่น นักเรียนเรียนรู้ในการแก้สมการเชิงเส้น 2 สมการ ได้แก่ $3x = 21$ and $(2/3)\ x = 21$ ถ้านักเรียนเข้าใจว่าสมการนี้มีความคล้ายคลึงกันทางคณิตศาสตร์และมองเห็นว่ากระบวนการแก้สมการสามารถทำได้ในลักษณะเดียวกัน นั่นคือนักเรียนได้แสดงถึงลักษณะการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปแบบขยายหรือแบบนำมากลับมาสร้างใหม่อันใดอันหนึ่ง ผู้เรียนก็อาจจะขยาย

องค์ความรู้เกี่ยวกับการแก้สมการแรกหรือสร้างองค์ความรู้ใหม่เพื่อนำมาขยายปรับประยุกต์ใช้แบบแผนในการแก้ปัญหาอย่างใดอย่างหนึ่งของสมการนั้น ๆ รวมทั้งสมการอื่นด้วย แต่ถ้านักเรียนมองเป็นสองสมการและวิธีการแก้ปัญหาของทั้งสองสมการไม่เกี่ยวข้องกัน นักเรียนก็อาจจะใช้การสร้างความเป็นกรณีทั่วไปแบบแยกแยะในการสร้างองค์ความรู้เพื่อแก้สมการแต่ละสมการนั้นๆ

ซาซคิส และ ลิลจี้ (Zazkis and Liljea. 2002 : 388 – 391) กล่าวว่า การสร้างความเป็นกรณีทั่วไปแบ่งออกเป็น 2 ประเภทคือ การวางนัยทั่วไปเชิงประจักษ์ (Empirical Generalization) และการวางนัยทั่วไปเชิงทฤษฎี (Theoretical Generalization)

1. การวางนัยทั่วไปเชิงประจักษ์มีรากฐานมาจากการจำแนกลักษณะร่วมหรือคุณลักษณะร่วมของสิ่งใดสิ่งหนึ่ง ทั้งนี้การวางนัยทั่วไปเชิงประจักษ์ถูกวิจารณ์ว่าขาดเป้าหมายเฉพาะในการตัดสินใจว่าอะไรคือสิ่งที่จำเป็น จำกัดขอบเขตโดยปราศจากความเป็นไปได้ในการอ้างอิงต่อไปและมีความเชื่อถือที่มากเกินไปบนตัวอย่างเฉพาะ

2. การวางนัยทั่วไปเชิงทฤษฎี หรือเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า ระบบของการปฏิบัติ (System of Action) ซึ่งจะประกอบด้วยสิ่งที่จำเป็น และการวางนัยทั่วไปจะถูกสร้างผ่านสิ่งที่เป็นนามธรรมของสิ่งที่จำเป็นนี้ คุณสมบัติของสิ่งที่เป็นนามธรรมเป็นความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งต่างๆมากกว่าเป็นความสัมพันธ์เฉพาะตัวของมันเอง

เอลลิส (Ellis. 2007 : 198 – 200) ได้แบ่งประเภทการสร้างความเป็นกรณีทั่วไป ได้เป็น 2 ประเภท คือ การกระทำการวางนัยทั่วไป (Generalization Actions) กับการสะท้อนการวางนัยทั่วไป(Reflection Generalizations)

1. การกระทำการวางนัยทั่วไปเป็นกิจกรรมที่นักเรียนกำลังดำเนินการสร้างข้อสรุปขึ้นมา ซึ่งการกระทำการวางนัยทั่วไปสามารถแบ่งได้เป็น3ชนิด

1.1 การหาความสัมพันธ์ (Relating)เป็นกิจกรรมที่นักเรียนสร้างความสัมพันธ์ระหว่างสองปัญหาหรือสองสถานการณ์ขึ้นไป หรือมุ่งพิจารณาไปที่คุณสมบัติ/แบบรูปที่มีลักษณะคล้ายคลึงกันของสองปัญหาหรือสองสถานการณ์นั้น การหาความสัมพันธ์สามารถแบ่งได้เป็น2กรณี ได้แก่

1.1.1 ความสัมพันธ์ของสถานการณ์เป็นความเกี่ยวเนื่องระหว่าง 2สถานการณ์/ปัญหาหรือมากกว่านั้น ซึ่งอาจเป็นแบบเชื่อมโยงระหว่าง

สถานการณ์ปัจจุบันกับสถานการณ์ที่ผ่านมา หรือการสร้างสถานการณ์ใหม่ที่คล้ายคลึงกันกับสถานการณ์ที่มีอยู่

1.1.2 ความสัมพันธ์ของวัตถุ เป็นความเกี่ยวเนื่องของความคล้ายคลึงกันระหว่าง2วัตถุ หรือมากกว่านั้น

1.2 การค้นหา (Searching) เป็นกิจกรรมที่นักเรียนเข้าร่วมในการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ซ้ำอีกครั้งโดยการค้นหาและตรวจสอบความสัมพันธ์ของสถานการณ์นั้น เช่น การคิดคำนวณอัตราส่วนหรือกำหนดแบบรูป เพื่อนำไปสู่การกำหนดสิ่งที่มีลักษณะเหมือนกันการค้นหาสามารถแบ่งได้เป็น4กรณี ได้แก่

1.2.1 ความสัมพันธ์ที่เหมือนกัน เป็นการกระทำซ้ำเพื่อที่จะตรวจสอบว่าความคงที่ระหว่างวัตถุ 2 วัตถุ หรือมากกว่ากัน

1.2.2 กระบวนการที่เหมือนกัน เป็นการกรทำซ้ำของกระบวนการเพื่อที่จะตรวจสอบว่าให้ผลที่ตรงกันทั่วทุกกรณี

1.2.3 รูปแบบที่เหมือนกัน เป็นการตรวจสอบว่าทุกๆกรณีต่างเป็นรูปแบบเดียวกันหมดหรือไม่

1.2.4 คำตอบหรือผลลัพธ์ที่เหมือนกัน เป็นการกระทำซ้ำเพื่อตัดสินใจว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการปฏิบัติยังคงให้เหตุผลที่เหมือนกันทุกๆครั้ง

1.3 การขยาย (Extending) เป็นกิจกรรมเกี่ยวกับการขยายแบบรูปหรือกฎโครงสร้างที่เป็นรูปแบบทั่วไป นักเรียนจะขยายเหตุผลที่กว้างมากขึ้นกว่าปัญหาสถานการณ์ หรือกรณีที่เป็นจุดเริ่มต้น การขยายสามารถแบ่งได้เป็น 4 กรณี ได้แก่

1.3.1 การขยายขอบเขตของการใช้เป็นการประยุกต์ใช้ของปรากฏการณ์ให้มีขอบเขตที่กว้างมากขึ้นจากกรณีแรกต้น

1.3.2 การเคลื่อนย้ายลักษณะเฉพาะ เป็นการย้ายรายละเอียดของบริบทเพื่อที่จะพัฒนาไปสู่กรณีทั่วไป

1.3.3 การดำเนินการ เป็นการดำเนินการทางคณิตศาสตร์บนวัตถุเพื่อที่จะสร้างกรณีใหม่ๆ

1.3.4 การต่อเนื่อง เป็นการกระทำซ้ำของรูปแบบที่มีอยู่เพื่อที่จะสร้างกรณีใหม่ๆ

2. การสะท้อนการวางในทั่วไป เป็นการแสดงถึงข้อความขั้นสุดท้ายของนักเรียนในการวางในทั่วไป ซึ่งการสะท้อนการวางนัยทั่วไปประกอบด้วย

2.1 การหาเอกลักษณ์ (Identification) เป็นการสร้างข้อความของการวางนัยทั่วไป ซึ่งจะอยู่ในรูปของการหาเอกลักษณ์หรือข้อความของแบบรูปทั่วไป คุณสมบัติ กฎ การหาเอกลักษณ์สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี ได้แก่

2.1.1 ความเหมือนกัน เป็นข้อความของลักษณะร่วมกันหรือเหมือนกัน

2.1.2 หลักการทั่วไป เป็นข้อความของปรากฏการณ์ทั่วไป เช่น แบบรูป กระบวนการ และกฎทั่วไป

2.2 การนิยาม (Definition) เป็นการสร้างข้อความลักษณะสำคัญของแบบรูป ความสัมพันธ์ ชั้น หรือปรากฏการณ์อื่นๆ

2.3 การนำไปใช้ (Influence) นักเรียนใช้ความรู้เดิมพัฒนาไปสู่การอ้างอิงในปัญหาใหม่ การนำไปใช้สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี ได้แก่

2.3.1 ความคิดหรือยุทธวิธีที่มีอยู่ก่อน เป็นการประยุกต์ของสิ่งที่มีอยู่ไปใช้ในการพัฒนาการวางนัยทั่วไป

2.3.2 การเปลี่ยนแปลงความคิดหรือยุทธวิธี เป็นการปรับปรุงกฎที่มีอยู่ไปประยุกต์ใช้ในปัญหาหรือสถานการณ์ใหม่

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า ประเภทของการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต มี 2 ประเภท ตามลักษณะวิธีการในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไป ได้แก่ การสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงประจักษ์ และการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงทฤษฎี

กลวิธีที่ใช้ในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต และการอ้างเหตุผล

ในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิตนั้น วิธีการคิดเพื่อหาแนวทางในการแก้สถานการณ์ปัญหาเป็นสิ่งที่มีความสำคัญ และปัจจัยหนึ่งที่จะช่วยให้นักเรียนสามารถสร้างความเป็นกรณีทั่วไปได้อย่างถูกต้อง คือการเลือกใช้กลวิธีในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต ซึ่งกลวิธีที่ใช้มี 4 กลวิธี ได้แก่ กลวิธีโดยปริยายของเหตุการณ์ กลวิธีการเปลี่ยนแปลงตามลำดับของเหตุการณ์ กลวิธีการเชื่อมโยงของเหตุการณ์ และกลวิธีการผสมผสานของเหตุการณ์ โดยแต่ละกลวิธีจะต้องอาศัยการอ้างเหตุผลเพื่อแสดงถึงระดับของการใช้กลวิธีในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต ซึ่งการอ้างเหตุผลมี 2 แบบ คือ การอ้างเหตุผลเชิงบริบทและการอ้างเหตุผลเชิงตัวเลข ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ประเภทและการใช้กลวิธีในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต

การศึกษาที่มุ่งเน้นไปที่กลวิธีที่ใช้ในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเกี่ยวกับพีชคณิตของนักเรียนยังมีค่อนข้างน้อย งานวิจัยส่วนใหญ่จะทำกับนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย ที่จะไปศึกษาต่อในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ซึ่งเอกสารเหล่านี้เป็นรากฐานที่แข็งแกร่งในการตรวจสอบกลวิธีที่นักเรียนใช้ในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปทางคณิตศาสตร์ (Townsend. 2005 : 31) มีนักการศึกษาหลายท่านให้ความสนใจและศึกษาเกี่ยวกับกลวิธีที่ใช้ในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

ซีกเลอร์ (Siegler. 1996 : 56) กล่าวว่า กลวิธีเป็นวิธีดำเนินการทีละขั้นของกระบวนการสำหรับการแก้โจทย์ปัญหา

สตาเคย์ (Stacey. 1989 : 147 – 164) อธิบายว่า กลวิธีที่หลากหลายจะถูกใช้โดยนักเรียนอายุ 9 – 11 ปี ใช้แก้ปัญหาในบริบทของปัญหาเชิงเส้น ซึ่งกลวิธีที่ใช้ ได้แก่ กลวิธีการนับ (Counting Strategy) กลวิธีความแตกต่าง (Difference Strategy) กลวิธีใช้ของจริง (Whole – object Strategy) และกลวิธีเชิงเส้น (Linear Strategy)

1. กลวิธีการนับ เป็นกลวิธีที่นักเรียนนับจำนวนรายการต่าง ๆ จากการวาดภาพประกอบ

2. กลวิธีความแตกต่าง เกี่ยวข้องกับการคูณด้วยผลต่างร่วม

3. กลวิธีใช้ของจริง เป็นการใช้การคูณค่าก่อนหน้าเพื่อให้ได้ค่าใหม่ โดยสร้างข้อตกลงว่าข้อมูลมีลักษณะแปรผันตรง

4. กลวิธีเชิงเส้น เป็นการใช้ผลจากการพัฒนารูปแบบเชิงเส้นที่มีตัวแปรในการหาคำตอบของปัญหา

ฮีลลี่ และ ฮอยเลส (Healy and Hoyles. 1999 : 59 – 84) กล่าวว่า กลวิธีที่นักเรียนอายุ 12 – 13 ปีใช้ในการแก้ปัญหาสถานการณ์เชิงเส้น มี 3 ประเภท ได้แก่ กลวิธีการเปลี่ยนแปลงตามลำดับและผสมผสานของเหตุการณ์ (Recursive and Chunking) กลวิธีการเชื่อมโยงของเหตุการณ์ (Whole-object) และกลวิธีโดยปริยายของเหตุการณ์ (Explicit)

สวาฟฟอร์ด และ แลนแกรลล์ (Swafford and Langrall. 2000 : 90) เสนอว่า นักเรียนเกรด 6 มีการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปทางพีชคณิตของความรู้ในระดับเดิมที่เคยเรียนสู่การเรียนการสอนใหม่ โดยใช้กลวิธีการเปลี่ยนแปลงตามลำดับและผสมผสานของเหตุการณ์ (Recursive and Chunking) กลวิธีการเชื่อมโยงของเหตุการณ์ (Whole-object) และกลวิธีโดยปริยายของเหตุการณ์ (Explicit)

แลนนิน บาร์เกอร์ และทาวน์เซนด์ (Lannin, Barker and Townsend. 2006 : 3 – 28) กล่าวว่า กลวิธีที่นักเรียนใช้ในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปของปัญหาเชิงเส้น มีทั้งหมด 4 กลวิธี ได้แก่ กลวิธีโดยปริยายของเหตุการณ์ (Explicit) กลวิธีการเปลี่ยนแปลงตามลำดับของเหตุการณ์ (Recursive) กลวิธีการเชื่อมโยงของเหตุการณ์ (Whole-object) และกลวิธีผสมผสานของเหตุการณ์ (Chunking)

ทาวเซนด์ (Townsend. 2005 : 14-16) กล่าวว่า กลวิธีที่ใช้ในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต หมายถึง การกำหนดแนวทางในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต เพื่อให้บรรลุตามเป้าหมายที่ได้กำหนดไว้ มีทั้งหมด 4 แบบ ได้แก่ กลวิธีโดยปริยายของเหตุการณ์ (Explicit Strategy) กลวิธีการเปลี่ยนแปลงตามลำดับของเหตุการณ์ (Recursive Strategy) กลวิธีการเชื่อมโยงของเหตุการณ์ (Whole – object Strategy) และกลวิธีการผสมผสานของเหตุการณ์ (Chunking Strategy)

จากที่กล่าวมา พบว่า ฮีลลี่ และ ฮอยเลส (Healy and Hoyles. 1999 : 59 – 84) สวาฟฟอร์ด และ แลนแกรลล์ (Swafford and Langrall. 2000 : 90) แลนนิน บาร์เกอร์ และทาวน์เซนด์ (Lannin, Barker and Townsend. 2006 : 3 – 28) และทาวเซนด์ (Townsend. 2005 : 14-16) ได้จำแนกประเภทของกลวิธที่ใช้ในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต ได้ 4 กลวิธี ได้แก่ กลวิธีโดยปริยายของเหตุการณ์ (Explicit Strategy) กลวิธีการเปลี่ยนแปลงตามลำดับของเหตุการณ์ (Recursive Strategy) กลวิธีการเชื่อมโยงของเหตุการณ์ (Whole – object Strategy) และกลวิธีการผสมผสานของเหตุการณ์ (Chunking Strategy) โดยมีรายละเอียดแต่ละกลวิธีที่ใช้ในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิตที่ดังนี้

1. กลวิธีโดยปริยายของเหตุการณ์ (Explicit Strategy)

กลวิธีโดยปริยายของเหตุการณ์ เป็นกลวิธีที่ใช้ในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปทางคณิตศาสตร์ ที่อธิบายและตรวจสอบด้วยการใช้ความสัมพันธ์ของตัวแปรต้นกับการหาค่าตัวแปรตามของสถานการณ์ปัญหา การสร้างความเป็นกรณีทั่วไปโดยปริยายของเหตุการณ์ หรือ รูปแบบปิด เป็นที่ยอมรับในการคำนวณค่าใด ๆ อย่างรวดเร็วสำหรับสถานการณ์ใดๆ โดยการพิจารณาความสัมพันธ์ของตัวแปรอิสระสู่ตัวแปรตาม จนกระทั่งปัจจุบันการพัฒนากฎแบบ โดยปริยายของเหตุการณ์ได้รับการยอมรับและถูกกำหนดเป็นกฎเบื้องต้นในหนังสือเรียนพีชคณิต สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกามีการสนับสนุนให้ใช้การคิดโดยปริยายของเหตุการณ์ ตลอดทั้งแสดงไว้ในมาตรฐาน เช่น หลักสูตรและการประเมินผลมาตรฐานสำหรับคณิตศาสตร์ในโรงเรียน (NCTM. 1989 : 36)

และ หลักการและมาตรฐานสำหรับคณิตศาสตร์ในโรงเรียน (NCTM. 2000 : 173) ทั้งยังให้ตัวอย่างที่ส่งเสริมเป้าหมายของการใช้การให้เหตุผลโดยปริยายของเหตุการณ์ ที่ระดับชั้นต่าง ๆ ด้วย แม้ในปัจจุบันจะมีเทคโนโลยีที่ทันสมัยในการคำนวณ แต่กลวิธีโดยปริยายของเหตุการณ์ ก็ยังมีความสำคัญมากในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างเข้าใจ (Kaput. 1995 : 35)

2. กลวิธีการเปลี่ยนแปลงตามลำดับของเหตุการณ์ (Recursive Strategy)

กลวิธีการเปลี่ยนแปลงตามลำดับของเหตุการณ์ เป็นกลวิธีที่ใช้ในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปทางคณิตศาสตร์ โดยการอธิบายความสัมพันธ์ของแต่ละเหตุการณ์ปัญหาที่เกิดขึ้น ในลักษณะการเชื่อมโยงข้อมูลที่ปรากฏในปัญหาและกระบวนการแก้ปัญหาตามลำดับของเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปแบบเปลี่ยนแปลงตามลำดับของเหตุการณ์ กลวิธีนี้มักจะให้ทางเลือกที่สามารถใช้ในการแก้ปัญหาเชิงพีชคณิตในชีวิตได้ กลวิธีการเปลี่ยนแปลงตามลำดับของเหตุการณ์ เกี่ยวข้องกับการรับรู้และประยุกต์ใช้การเปลี่ยนแปลงจากเทอมไปสู่เทอมในตัวแปรอิสระ ซึ่งเป็นการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของแต่ละเหตุการณ์ที่มีการเปลี่ยนแปลง นักเรียนโดยทั่วไปมักจะใช้กลวิธีนี้ในเบื้องต้นของการแก้ปัญหา (Swafford and Langrall. 2000 : 100) และกลวิธีมีความสำคัญเพียงพอในการนำไปใช้จัดการเรียนการสอนเกี่ยวกับการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิตทั้งระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และมัธยมศึกษาตอนต้น (NCTM. 1989 : 178, 263, 296)

3. กลวิธีการเชื่อมโยงของเหตุการณ์ (Whole – object Strategy)

กลวิธีการเชื่อมโยงของเหตุการณ์ เป็นกลวิธีที่ใช้ในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปทางคณิตศาสตร์ โดยการนำของจริงหรือแผนภาพโครงสร้างปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นในมิติการรู้คิด เพื่อนำเสนอและอธิบายด้วยการเชื่อมโยงข้อมูลของเหตุการณ์ปัญหาแล้วใช้หลักการและวิธีการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะวิธีการคูณจำนวนที่เป็นความสัมพันธ์ของเหตุการณ์กับค่าที่มีอยู่แล้วเพื่อหาค่าที่ต้องการใหม่ กลวิธีการเชื่อมโยงของเหตุการณ์เป็นกลวิธีที่ใช้การคูณสิ่งที่เป็นข้อแตกต่างร่วมกันของสิ่งที่มีอยู่แล้วด้วยค่าที่มีอยู่แล้ว เพื่อหาค่าใหม่ที่ต้องการ ซึ่งการใช้วิธีการแบบนี้อาจจะมีข้อผิดพลาดได้ง่ายหากนำไปใช้โดยไม่พิจารณาความสัมพันธ์และเงื่อนไขของเหตุการณ์

4. กลวิธีการผสมผสานของเหตุการณ์ (Chunking Strategy)

กลวิธีการผสมผสานของเหตุการณ์ เป็นกลวิธีที่ใช้ในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปโดยใช้วิธีการอธิบายและลงความเห็นเพื่อสรุปคำตอบของปัญหาคณิตศาสตร์ใน

ลักษณะการผสมผสานแนวคิดกลวิธีทั้ง 3 แบบที่กล่าวไว้ข้างต้น ในแนวทางใดทางหนึ่งที่เหมาะสมและยอมรับได้ด้วยหลักเหตุผลซึ่งอาจจะใช้เพียงกลวิธีเดียวหรือหลายกลวิธีก็ได้ แล้วพิจารณาความสัมพันธ์ของเหตุการณ์ที่ปรากฏในสถานการณ์ปัญหาเพื่อค้นหาคำตอบ โดยผลลัพธ์ที่ต้องการจะเกิดจากการนำข้อมูลที่มีอยู่แล้วมาคิดคำนวณเพื่อให้ได้คำตอบใหม่ กลวิธีการผสมผสานของเหตุการณ์ เป็นกลวิธีที่เพิ่งได้รับการยอมรับและให้ความสนใจ ดังนั้นเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับกลวิธีนี้จึงมีน้อยกว่า 3 กลวิธีข้างต้น ซึ่งกลวิธีการผสมผสานของเหตุการณ์ (การบวกซ้ำแล้วซ้ำอีกซึ่งแสดงถึงการคูณ) เป็นกฎที่สำคัญในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต เพราะเกิดการเชื่อมโยงที่อาจเกิดขึ้นระหว่างการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปโดยใช้กลวิธีโดยปริยายของเหตุการณ์ และกลวิธีการเปลี่ยนแปลงตามลำดับของเหตุการณ์หรือกลวิธีการเชื่อมโยงของเหตุการณ์ หรือทั้ง 3 กลวิธี เช่น เราทราบว่า เหตุการณ์ที่ทราบค่าก่อนหน้า มีค่า 20 และทราบว่าแต่ละเหตุการณ์ค่าเพิ่มขึ้น 3 ดังนั้น ถ้าอยากทราบเหตุการณ์ต่อจากนี้ไป 2 เหตุการณ์ ก็สามารถทำได้โดย นำ 20 บวกกับ 2(3) ก็จะได้ค่าที่ต้องการ

ในการวิจัยครั้งนี้ได้ใช้กลวิธีที่ใช้ในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต 4 กลวิธี ดังนี้ กลวิธีโดยปริยายของเหตุการณ์ กลวิธีการเปลี่ยนแปลงตามลำดับของเหตุการณ์ กลวิธีการเชื่อมโยงของเหตุการณ์ และ กลวิธีการผสมผสานของเหตุการณ์ ซึ่งจะต้องใช้การอ้างเหตุผลเชิงบริบทและเชิงตัวเลขในการแสดงการใช้กลวิธีในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต

การอ้างเหตุผล

การอ้างเหตุผล เป็นการแสดงความคิด ความเข้าใจ โดยใช้ความรู้มาเชื่อมโยงเพื่อประกอบการตัดสินใจและการให้เหตุผลในสิ่งใดสิ่งหนึ่งของนักเรียน เพื่อนำไปสู่การสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องและมีความสมเหตุสมผล

พรรณทิพา พรหมรักษ์ (2552 : 40) กล่าวว่า การอ้างเหตุผลเป็นองค์ประกอบที่สำคัญของกระบวนการสร้างความเป็นกรณีทั่วไป เพราะการอ้างเหตุผลเป็นปัจจัยที่ช่วยนำไปสู่การสร้างข้อสรุปได้อย่างถูกต้องและสมเหตุสมผล

ลินส์ (Lins. 2001: 37) กล่าวว่า การอ้างเหตุผลเปรียบเหมือนหน้าต่างที่แสดงให้เห็นถึงการคิดของนักเรียน

แลนนิน บาร์เกอร์ และ ทาวเซนด์ (Lannin, Barker and Townsend. 2006 : 25) กล่าวว่า การอ้างเหตุผลมีคุณค่าอย่างมาก เพราะเป็นการอธิบายอย่างมีเหตุผล มีความเชื่อถือได้มากกว่าความเชื่อถือธรรมดา กล่าวคือ สามารถอธิบายความสัมพันธ์ของสิ่งที่สังเกตได้ทุกกรณีที่อยู่ในสถานการณ์นั้น ซึ่งมีกรอบของระดับการอ้างเหตุผล ดังแสดงในตารางที่ 3 ดังนี้

ตารางที่ 3 ระดับการอ้างเหตุผล

ระดับการอ้างเหตุผล	คำอธิบาย
ระดับ 0 : ไม่อ้างอิงเหตุผล (No Justification)	ไม่มีการอ้างเหตุผลกำกับไว้
ระดับ 1 : อ้างอิงบุคคลอื่น(Appeal to External)	อ้างอิงความถูกต้องโดยอ้างจากบุคคลอื่นๆหรือเอกสารอื่นๆ
ระดับ 2: มีหลักฐานเชิงประจักษ์ (Generic External)	การอ้างอิงเหตุผลผ่านตัวอย่างเฉพะ
ระดับ 3 : แสดงตัวอย่างที่อยู่ในรูปทั่วๆไป(Generic External)	การอ้างอิงเหตุผลแบบนิรนัยที่แสดงในรูปตัวอย่างเฉพาะ
ระดับ 4 : การอ้างอิงเหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Justification)	การอ้างอิงเหตุผลผ่านรูปของกฎทางนิรนัย ซึ่งขึ้นอยู่กับตัวอย่างเฉพาะ

ทาวน์เซนด์ (Townsend. 2005 : 11 – 18) กล่าวว่า การอ้างเหตุผลเป็นการนำเสนอความคิด ความเข้าใจที่ใช้ประกอบการตัดสินใจแก้ปัญหาและสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องและเหมาะสม การอ้างเหตุผลมี 2 ประเภท คือ การอ้างเหตุผลเชิงบริบท (Contextual Justification) เป็นการอ้างเหตุผลที่นำไปสู่การสร้างความเป็นกรณีทั่วไปที่ถูกต้องและสมเหตุสมผลในลักษณะของความรู้ความเข้าใจ และการอ้างเหตุผลเชิงตัวเลข (Numerical Justification) เป็นการอ้างเหตุผลที่นำไปสู่การสร้างความเป็นกรณีทั่วไปที่ถูกต้องและสมเหตุสมผลในลักษณะของการดำเนินการเชิงตัวเลข

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า การอ้างเหตุผล หมายถึง การแสดงความคิด ความเข้าใจและการให้เหตุผลเกี่ยวกับสิ่งใดสิ่งหนึ่งของผู้เรียน เพื่อนำไปสู่การสร้างความเป็นกรณีทั่วไปที่ถูกต้องและมีความสมเหตุสมผล แบ่งออกเป็น การอ้างเหตุผลเชิงบริบท หมายถึง การแสดงความคิด ความเข้าใจ และการให้เหตุผลเกี่ยวกับสิ่งใดสิ่งหนึ่งของผู้เรียน เพื่อนำไปสู่

การสร้างความเป็นกรณีทั่วไปที่ถูกต้องและมีความสมเหตุสมผลในลักษณะของความรู้ความเข้าใจ และการอ้างเหตุผลเชิงตัวเลข หมายถึง การแสดงความคิด ความเข้าใจ และการให้เหตุผลเกี่ยวกับสิ่งใดสิ่งหนึ่งของผู้เรียน เพื่อนำไปสู่การสร้างความเป็นกรณีทั่วไปที่ถูกต้องและมีความสมเหตุสมผลในลักษณะของการดำเนินการเชิงตัวเลข

ลักษณะการอ้างเหตุผลในการใช้กลวิธีในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต

ลักษณะการอ้างเหตุผลในการใช้กลวิธีในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิตมี 2 แบบ การอ้างเหตุผลเชิงบริบท (Contextual Justification) และการอ้างเหตุผลเชิงตัวเลข (Numerical Justification) โดยแต่ละแบบจะแสดงถึงระดับการใช้กลวิธีในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไป ลักษณะการอ้างเหตุผลในการใช้กลวิธีในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต ดังแสดงในตารางที่ 4 ดังนี้ (Townsend. 2005 : 15)

ตารางที่ 4 ลักษณะการอ้างเหตุผลในการใช้กลวิธีในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต

กลวิธี	เชิงบริบท	เชิงตัวเลข
กลวิธีโดยปริยายของเหตุการณ์	ใช้ความสัมพันธ์ของตัวแปรต้นเพื่อนำไปสู่การหาค่าของตัวแปรตาม	แสดงถึงความเข้าใจลักษณะการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์ที่ขึ้นอยู่กับตัวไม่ทราบค่า และพยายามสร้างเป็นกฎ สูตร หรือรูปทั่วไปเพื่อง่ายในการคิดคำนวณ และแทนจำนวนที่เป็นปัจจัยในการเปลี่ยนแปลงเพื่อให้ได้ค่าใหม่ลงในตัวไม่ทราบค่า แล้วใช้การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ช่วยในการหาคำตอบที่ต้องการ
กลวิธีการเปลี่ยนแปลงตามลำดับของเหตุการณ์	พิจารณาความสัมพันธ์ของแต่ละเหตุการณ์ปัญหาที่เกิดขึ้น แล้วเชื่อมโยงข้อมูลเหล่านั้นในการแก้ปัญหาตามลำดับของเหตุการณ์	สังเกตเห็นแบบรูปหรือความสัมพันธ์ในการหาผลลัพธ์ของเหตุการณ์ในลำดับต่าง ๆ และเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของค่าเดิม

กลวิธี	เชิงบริบท	เชิงตัวเลข
		กับค่าใหม่ที่ต้องการโดยใช้การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ช่วยในการหาคำตอบ ซึ่งอาจจะเป็นลักษณะของการเพิ่มขึ้นหรือลดลงตามลักษณะความสัมพันธ์นั้น ๆ
กลวิธีการเชื่อมโยงของเหตุการณ์	สร้างภาพในใจในการเชื่อมโยงข้อมูลของเหตุการณ์ แล้วใช้หลักของการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะการคูณกับค่าที่มีอยู่แล้วเพื่อหาค่าที่ต้องการใหม่	ใช้ส่วนที่เป็นชุดเดิมในการสร้างชุดที่ใหญ่ขึ้นโดยใช้การคูณชุดเดิมกับค่าที่กำหนดจากการพิจารณาความสัมพันธ์ของแต่ละเหตุการณ์ เพื่อให้ได้ค่าของชุดใหม่ ซึ่งในบางสถานการณ์
		ปัญหาอาจจะต้องพิจารณาความสัมพันธ์ของแต่ละองค์ประกอบในชุดเดิมด้วย ซึ่งอาจจะต้องนำบางค่ามาบวกเข้าหรือลบออกออกก่อนจึงจะได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้อง เพราะหากไม่พิจารณาอาจจะเกิดข้อผิดพลาดได้
กลวิธีการผสมผสานของเหตุการณ์	ใช้วิธีการหาผลลัพธ์ที่ต่อเนื่องจากค่าที่มีอยู่แล้ว ซึ่งค่าที่มีอยู่แล้วได้มาจากการใช้กลวิธีต่าง ๆ ใน 3 กลวิธีข้างต้น อาจจะใช้เพียงกลวิธีเดียวหรือหลายกลวิธีก็ได้ แล้วพิจารณาความสัมพันธ์ของเหตุการณ์ที่เหลือจนถึงเหตุการณ์ที่เป็นผลลัพธ์เพื่อหาค่าใหม่ ซึ่งผลลัพธ์ที่ต้องการได้เกิดจากการ	นำค่าที่มีอยู่แล้วซึ่งได้จากการใช้กลวิธีในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปใน 3 กลวิธีข้างต้น อาจจะใช้เพียงกลวิธีเดียวหรือหลายกลวิธีก็ได้ รวมกับค่าที่หาได้ใหม่จากการพิจารณาความสัมพันธ์ของเหตุการณ์ที่เหลือจนถึงเหตุการณ์ที่เป็นผลลัพธ์ เช่น ในเบื้องต้นใช้กลวิธีการเปลี่ยนแปลง

กลวิธี	เชิงบริบท	เชิงตัวเลข
	นำค่าที่มีอยู่แล้วรวมกับค่าที่หาได้ใหม่	ตามลำดับของเหตุการณ์ก่อนเพื่อหาค่าของเหตุการณ์ที่เป็นลำดับต้น ๆ แล้วใช้กลวิธีโดยปริยายของเหตุการณ์หาค่าของเหตุการณ์ต่อ ๆ ไปตามต้องการ แล้วนำมาค่าทั้งสองมารวมกัน

ระดับของกลวิธีที่ใช้ในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต

ระดับของกลวิธีที่ใช้ในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต พิจารณาจากลักษณะการอ้างเหตุผล 2 แบบ คือ การอ้างเหตุผลเชิงบริบท (Contextual Justification) และการอ้างเหตุผลเชิงตัวเลข (Numerical Justification) ซึ่งหากใช้กลวิธีใดด้วยการอ้างเหตุผลเชิงบริบท แสดงว่ามีการใช้กลวิธีนั้นในระดับสูง หากใช้กลวิธีใดด้วยการอ้างเหตุผลเชิงตัวเลข แสดงว่ามีการใช้กลวิธีนั้นในระดับปานกลาง และหากไม่ใช้กลวิธีใดในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต แสดงว่ามีการใช้กลวิธีนั้นในระดับต่ำ ดังแสดงในตารางที่ 5 ดังนี้ (Townsend. 2005 : 80 – 82)

ตารางที่ 5 ระดับของกลวิธีที่ใช้ในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิตแบบต่าง ๆ

กลวิธี	ระดับของกลวิธีที่ใช้ในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต		
	สูง	ปานกลาง	ต่ำ
กลวิธีโดยปริยายของเหตุการณ์	แสดงถึงการใช้กลวิธีโดยปริยายของเหตุการณ์ด้วยการอ้างเหตุผลเชิงบริบทในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปอย่างถูกต้อง	แสดงถึงการใช้กลวิธีโดยปริยายของเหตุการณ์ด้วยการอ้างเหตุผลเชิงตัวเลขในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปอย่างถูกต้อง	แสดงถึงการใช้กลวิธีโดยปริยายของเหตุการณ์ แต่สร้างความเป็นกรณีทั่วไปที่ไม่ถูกต้อง หรือไม่พบการใช้กลวิธีนี้

กลวิธี	ระดับของกลวิธีที่ใช้ในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต		
	สูง	ปานกลาง	ต่ำ
กลวิธีการเปลี่ยนแปลงตามลำดับของเหตุการณ์	แสดงถึงการใช้กลวิธีการเปลี่ยนแปลงตามลำดับของเหตุการณ์ด้วยการอ้างเหตุผลเชิงบริบทในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปอย่างถูกต้อง	แสดงถึงการใช้กลวิธีการเปลี่ยนแปลงตามลำดับของเหตุการณ์ด้วยการอ้างเหตุผลเชิงตัวเลขในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปอย่างถูกต้อง	แสดงถึงการใช้กลวิธีการเปลี่ยนแปลงตามลำดับของเหตุการณ์ แต่สร้างความเป็นกรณีทั่วไปที่ไม่ถูกต้อง หรือไม่พบการใช้กลวิธีนี้
กลวิธีการเชื่อมโยงของเหตุการณ์	แสดงถึงการใช้กลวิธีการเชื่อมโยงของเหตุการณ์ด้วยการอ้างเหตุผลเชิงบริบทในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปอย่างถูกต้อง	แสดงถึงการใช้กลวิธีการเชื่อมโยงของเหตุการณ์ด้วยการอ้างเหตุผลเชิงตัวเลขในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปอย่างถูกต้อง	แสดงถึงการใช้กลวิธีการเชื่อมโยงของเหตุการณ์ แต่สร้างความเป็นกรณีทั่วไปที่ไม่ถูกต้อง หรือไม่พบการใช้กลวิธีนี้
กลวิธีการผสมผสานของเหตุการณ์	แสดงถึงการใช้กลวิธีการผสมผสานของเหตุการณ์ ด้วยการอ้างเหตุผลเชิงบริบทในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปอย่างถูกต้อง	แสดงถึงการใช้กลวิธีการผสมผสานของเหตุการณ์ ด้วยการอ้างเหตุผลเชิงตัวเลขในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปอย่างถูกต้อง	แสดงถึงการใช้กลวิธีการผสมผสานของเหตุการณ์ แต่สร้างความเป็นกรณีทั่วไปที่ไม่ถูกต้อง หรือไม่พบการใช้กลวิธีนี้สถานการณ์ปัญหา

ความยืดหยุ่นในการใช้กลวิธีเพื่อสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต

ความยืดหยุ่นเป็นคุณลักษณะที่มีคุณค่าของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่เพิ่มประสิทธิภาพพลังทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในรูปแบบการแก้ปัญหาที่เกิดจากการสั่งสมความคิดที่แตกต่างอย่างหลากหลาย ซึ่งผลกระทบของความยืดหยุ่นมีความสำคัญและเกี่ยวข้องกับสิ่งที่นำไปสู่คุณลักษณะที่มากกว่าการเข้าใจภายใต้คณิตศาสตร์และสิ่งที่พบเห็นในชีวิต ความยืดหยุ่นในการคิดเป็นการคิดที่ไม่ยึดติดกับรูปแบบ การแก้ปัญหาแบบใดแบบหนึ่ง หรือยึดติดรูปแบบที่ตนเองคุ้นเคย แต่ต้องยอมรับรูปแบบและวิธีการใหม่ ๆ อยู่เสมอ ความยืดหยุ่นเป็นความสามารถในการปรับกระบวนการแก้ปัญหา โดยบูรณาการ ความเข้าใจ ทักษะและความสามารถในการแก้ปัญหาที่มีประสิทธิภาพ (ปริญญา ผลิเจริญสุข. 2556 : ออนไลน์) การสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิตต้องอาศัยความยืดหยุ่นเป็นปัจจัยสำคัญ จึงขอเสนอรายละเอียดของความยืดหยุ่นในการใช้กลวิธีเพื่อสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต ตามลำดับหัวข้อต่อไปนี้คือ ความหมาย ประเภท และการพิจารณาระดับความยืดหยุ่นในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ความหมายของความยืดหยุ่นในการใช้กลวิธีเพื่อสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต

มีนักการศึกษาได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับความหมายความยืดหยุ่นในการใช้กลวิธีเพื่อสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต ดังนี้

ฮอลแลนด์ (Hollands. 1972 : 21) กล่าวว่า ความยืดหยุ่นแสดงออกผ่านการใช้วิธีการอย่างหลากหลาย

ครูเทตสกี (Krutetskii. 1976 : 188 – 222) เสนอว่า ความยืดหยุ่นเป็นความสามารถในการสับเปลี่ยนจากวิธีการแก้ปัญหาวิธีเดียวไปสู่วิธีการอื่น ๆ นอกจากนี้ความยืดหยุ่นยังหมายถึงสิ่งที่หลากหลายในการทำงานของคนภายในบริบทและประเด็นที่แตกต่างจากเดิม ซึ่งความยืดหยุ่นจำเป็นต้องได้รับการยอมรับจากนักวิจัยและนักฝึกปฏิบัติเพื่อให้เกิดมากกว่าความเข้าใจที่ชัดเจน และเกิดการคิดแลกเปลี่ยนเรียนรู้ ค้นพบความสัมพันธ์ซึ่งผ่านการคัดกรองแล้วเพื่อการเรียนรู้ที่สำคัญของนักเรียน

เลวิส (Lewis. 1981 : 85 – 110) กล่าวว่า ความยืดหยุ่นเป็นความสามารถในการใช้กลวิธีมากกว่าหนึ่งกลวิธีการในการแก้สมการหลายสมการที่มีลักษณะคล้ายคลึงกัน

เกรย์และทอลล์ (Gray and Tall. 1994 : 116 – 140) ให้ความหมายความยืดหยุ่นว่า เป็นการใช้ความสามารถที่หลากหลายในการสรุปจากวิธีการไปสู่หลักการหรือกฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM. 2000 : 127) กล่าวถึงความยืดหยุ่นเชิงพีชคณิตในลักษณะของการอธิบายสมรรถนะของการใช้กลวิธีที่หลากหลายในการแก้ปัญหา

สมาคมวิจัยแห่งชาติสหรัฐอเมริกา (National Research Council [NRC]. 2001 : ออนไลน์) กล่าวถึงความยืดหยุ่นว่า เป็นการใช้กลวิธีมากกว่าหนึ่งกลวิธีเพื่อแก้ปัญหาหรือสมการเดียวกัน

สตาร์และไซเฟิร์ท (Star and Seifert. 2006 : 280 - 300) กล่าวว่า ความยืดหยุ่นหมายถึงความสามารถในการปรับเปลี่ยนวิธีการคิดให้เป็นข้อสรุปตามเงื่อนไขของสถานการณ์เฉพาะต่าง ๆ

ริทเทิล-จอห์นสัน และสตาร์ (Rittle-Johnson B. and Star J.R. 2007 : 2) กล่าวว่า ความยืดหยุ่นในการแก้ปัญหาเป็นลักษณะการใช้กลวิธีที่หลากหลายอย่างมีประสิทธิภาพมากกว่าหนึ่งกลวิธีในการแก้ปัญหาให้สำเร็จ

ทาวเซนด์ (Townsend. 2005 : 11) กล่าวว่า ความยืดหยุ่นในการใช้กลวิธีเพื่อสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต เป็นลักษณะการใช้กลวิธีที่หลากหลาย ในการกำกับ เชื่อมโยง ประยุกต์ใช้ความรู้ เพื่อสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต ภายใต้บริบทและเงื่อนไขที่กำหนดให้

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า ความยืดหยุ่นในการใช้กลวิธีเพื่อสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต (Flexibility) หมายถึง ลักษณะของการใช้กลวิธีที่หลากหลายอย่างมีประสิทธิภาพในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิตที่ถูกต้อง ภายใต้บริบทและเงื่อนไขที่กำหนดให้

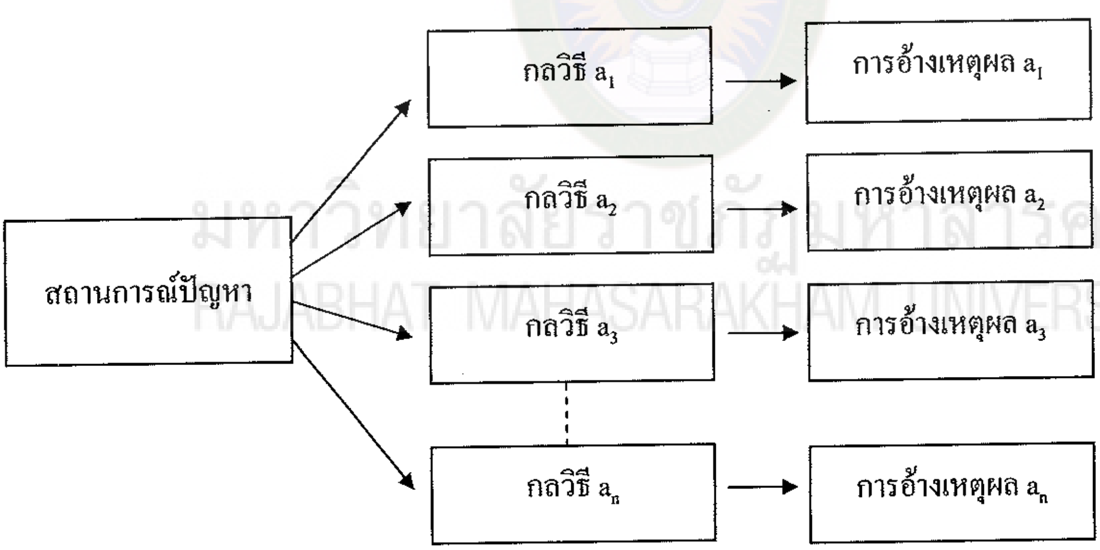
ประเภทของความยืดหยุ่นในการใช้กลวิธีเพื่อสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต

ครูเทตสกี (Krutetskii. 1976 : 188 – 222) เสนอว่า ความยืดหยุ่นในการใช้กลวิธีเพื่อสร้างความเป็นกรณีทั่วไป มี 2 ประเภท ได้แก่ ความยืดหยุ่นแบบภายในสถานการณ์ปัญหา (Within – task Flexibility) เกี่ยวกับความสามารถในการปรับระหว่างวิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหาสถานการณ์ปัญหาเฉพาะ และความยืดหยุ่นแบบไขว้สถานการณ์

ปัญหา (Cross – task Flexibility) เกี่ยวกับผลกระทบหรือสิ่งที่สำคัญนอกเหนือจากการแก้ปัญหาเฉพาะนั้น ๆ แล้วนำไปใช้ภายหลังได้

ทาวน์เซนด์ (Townsend. 2005 : 11 – 43) กล่าวว่า ความยืดหยุ่นในการใช้กลวิธีเพื่อสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต หมายถึง ลักษณะที่ใช้วิธีการอธิบายและคิดคำนวณหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ เพื่อแสดงการกำกับ เชื่อมโยง ประยุกต์ใช้ความรู้และกลวิธีในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปของสถานการณ์ปัญหาเชิงพีชคณิตที่มีความหลากหลาย ภายใต้บริบทและเงื่อนไขที่กำหนดให้ มี 2 ประเภท คือ แบบภายในสถานการณ์ปัญหา (Within – task Flexibility) ความยืดหยุ่นแบบไขว้สถานการณ์ปัญหา (Cross – task Flexibility)

ความยืดหยุ่นแบบภายในสถานการณ์ปัญหา เป็นการนำเสนอตัวแทนของความสามารถในพัฒนาจากการรับรู้สู่กลวิธีที่หลากหลายในการแก้ปัญหาภายใต้บริบทและเงื่อนไขของปัญหาเฉพาะ ซึ่งจะพิจารณาจากการใช้กลวิธีในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต ดังแสดงในแผนภาพที่ 4 ดังนี้

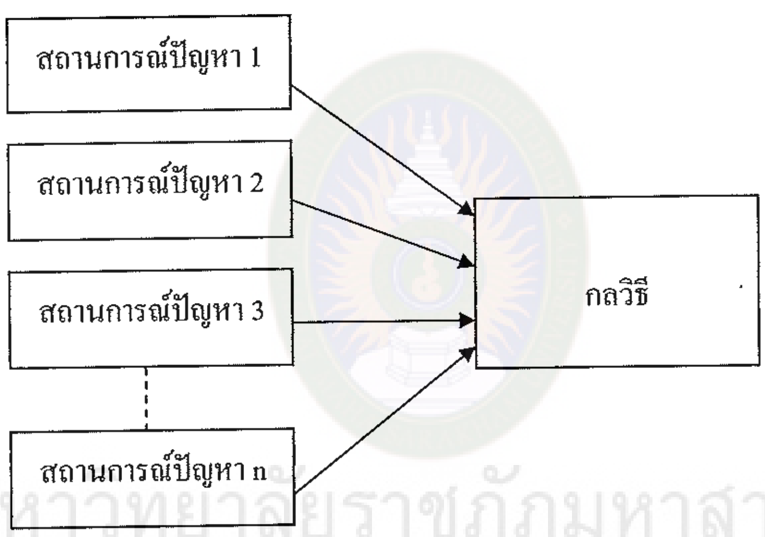


แผนภาพที่ 4 ความยืดหยุ่นแบบภายในสถานการณ์ปัญหา

จะเห็นว่า นักเรียนสามารถเลือกกลวิธี แผนการ หรือทางอื่น ๆ ได้อย่างหลากหลาย เมื่อทำการแก้สถานการณ์ปัญหาเชิงพีชคณิตใด ๆ เพื่อสร้างความเป็นกรณีทั่วไป ซึ่งการเลือกกลวิธีของนักเรียนขึ้นอยู่กับเงื่อนไขและองค์ประกอบที่หลากหลาย เช่น สังคม

สถานการณ์ปัญหา (ค่านำเข้า โครงสร้างทางคณิตศาสตร์) และสติปัญญา (ภาพในใจ ประสบการณ์เดิมในการใช้กลวิธี) ในการวิเคราะห์ความยืดหยุ่นแบบภายในสถานการณ์ปัญหา จะพิจารณาจากความสามารถในการแก้สถานการณ์ปัญหาด้วยวิธีการที่หลากหลาย เป็นการใช้มากกว่าหนึ่งกลวิธีเพื่อแก้สถานการณ์ปัญหาเดียวกัน

ความยืดหยุ่นแบบไขว้สถานการณ์ปัญหา เป็นความสามารถในการพัฒนาจากการรับรู้สู่การนำกลวิธีในการแก้ปัญหาเฉพาะไปใช้ในสถานการณ์อื่น ๆ อย่างหลากหลาย ซึ่งจะพิจารณาจากการใช้กลวิธีในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต ดังแสดงในแผนภาพที่ 5 ดังนี้



แผนภาพที่ 5 ความยืดหยุ่นแบบไขว้สถานการณ์ปัญหา

จะเห็นว่า ความยืดหยุ่นแบบไขว้สถานการณ์ปัญหาเป็นความสามารถของนักเรียนในการนำกลวิธีที่ใช้ในการสถานการณ์เฉพาะไปประยุกต์ใช้ในการแก้สถานการณ์ปัญหาอื่น ๆ ซึ่งสถานการณ์ปัญหานั้น ๆ อาจจะมีเงื่อนไขหรือองค์ประกอบบางอย่างที่สัมพันธ์กันกับสถานการณ์เดิม ในการวิเคราะห์ความยืดหยุ่นแบบไขว้สถานการณ์ปัญหา จะพิจารณาจากความสามารถในการนำกลวิธีที่เคยใช้แก้สถานการณ์ปัญหาไปใช้ในการแก้สถานการณ์ปัญหาอื่นที่มีความสัมพันธ์และลักษณะใกล้เคียงกัน เป็นการใช้มากกว่าหนึ่งกลวิธีเพื่อแก้สถานการณ์ปัญหาเดียวกัน เช่น นักเรียนที่ใช้หลายกลวิธีที่เคยใช้ในการแก้สมการหนึ่ง ๆ มาใช้ในการแก้สมการหลายสมการที่เป็นลักษณะเดียวกันกับสมการเดิม จะถือว่านักเรียนคนนั้นมีความยืดหยุ่นมากกว่า

จากที่กล่าวมา สรุปได้ว่า ความยืดหยุ่นในการใช้กลวิธีเพื่อสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต มี 2 ประเภท ได้แก่ ความยืดหยุ่นแบบภายในสถานการณ์ปัญหา (within – task flexibility) ความยืดหยุ่นแบบไขว้สถานการณ์ปัญหา (cross – task flexibility)

การพิจารณาความยืดหยุ่นในการใช้กลวิธีเพื่อสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต

ความยืดหยุ่นในการใช้กลวิธีเพื่อสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต พิจารณาจากระดับของกลวิธีที่ใช้ในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิตเทียบกับเกณฑ์การพิจารณาความยืดหยุ่นในการใช้กลวิธีเพื่อสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต ซึ่งเกณฑ์การพิจารณาแสดงในตารางที่ 6 ดังนี้ (Townsend. 2005 : 86)

ตารางที่ 6 เกณฑ์การพิจารณาความยืดหยุ่นของการใช้กลวิธีในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต

กรณีที่เป็นไปได้ของการใช้กลวิธี	กลวิธีที่ใช้ในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไป				ความยืดหยุ่น
	แบบที่ 1	แบบที่ 2	แบบที่ 3	แบบที่ 4	
1	สูง	สูง	สูง	สูง	สูง
2	สูง	สูง	สูง	ปานกลาง	สูง
3	สูง	สูง	สูง	ต่ำ	สูง
4	สูง	สูง	ปานกลาง	ปานกลาง	ปานกลาง
5	สูง	สูง	ปานกลาง	ต่ำ	ปานกลาง
6	ปานกลาง	ปานกลาง	ปานกลาง	ปานกลาง	ปานกลาง
7	สูง	ปานกลาง	ปานกลาง	ปานกลาง	ปานกลาง
8	สูง	ปานกลาง	ปานกลาง	ต่ำ	ปานกลาง
9	สูง	สูง	ต่ำ	ต่ำ	ต่ำ
10	สูง	ปานกลาง	ต่ำ	ต่ำ	ต่ำ
11	ปานกลาง	ปานกลาง	ต่ำ	ต่ำ	ต่ำ
12	สูง	ต่ำ	ต่ำ	ต่ำ	ต่ำ
13	ปานกลาง	ต่ำ	ต่ำ	ต่ำ	ต่ำ
14	ต่ำ	ต่ำ	ต่ำ	ต่ำ	ต่ำ

การตั้งเกณฑ์การประเมินความสามารถในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต

การสร้างความเป็นกรณีทั่วไปของสถานการณ์เชิงพีชคณิต มีทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง ได้แก่ ทักษะและกระบวนการให้เหตุผล ดังนั้นในการประเมินจึงควรยึดหลักของการประเมินทักษะและกระบวนการดังกล่าว ซึ่งในการประเมินต้องมีเกณฑ์การให้คะแนนที่เป็นระบบและชัดเจน เพื่อช่วยให้ครูสามารถพิจารณาและตัดสินได้ว่านักเรียนของตนมีความรู้ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับใด เกณฑ์การให้คะแนนที่ยอมรับและนำมาใช้กันอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน คือ การให้คะแนนโดยใช้เกณฑ์แบบรูบริค (Rubric Scoring) ซึ่งเป็นเกณฑ์ที่ประเมินจากผลงานที่นักเรียนทำหรือพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออก มีการกำหนดระดับคะแนนพร้อมระบุรายละเอียดของผลงานหรือพฤติกรรมของนักเรียนไว้อย่างชัดเจนและเป็นรูปธรรม ดังนี้ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2554 : 205 – 208)

การให้คะแนนโดยใช้เกณฑ์แบบรูบริค

การให้คะแนนโดยใช้เกณฑ์แบบรูบริค เป็นการให้คะแนนที่ไม่ได้พิจารณาที่คำตอบหรือผลลัพธ์สุดท้ายเพียงอย่างเดียว แต่ยังพิจารณาที่ขั้นตอนการทำงานของนักเรียนด้วยตลอดจนมีการกำหนดระดับคะแนนพร้อมระบุรายละเอียดของผลงานหรือพฤติกรรมของนักเรียนไว้อย่างชัดเจนและเป็นรูปธรรม สามารถเปลี่ยนแปลงได้ตามความเหมาะสม เกณฑ์การให้คะแนนแบบทดสอบอัตนัย หรือแบบทดสอบที่แสดงการให้เหตุผล ก็สามารถใช้เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริคได้เช่นเดียวกัน การให้คะแนนแบบรูบริค มี 2 แบบคือ การให้คะแนนแบบวิเคราะห์ (Analytic Scoring Scale) และแบบองค์รวม (Holistic Scoring Scale) ซึ่งเกณฑ์การให้คะแนนแบบแรกอยู่บนพื้นฐานการวิเคราะห์งานออกเป็นองค์ประกอบย่อยและกำหนดคะแนนสำหรับแต่ละองค์ประกอบย่อย ซึ่งการให้คะแนนแบบนี้ทำให้เห็นจุดเด่นและจุดด้อยของผู้เรียนในแต่ละองค์ประกอบ สำหรับเกณฑ์การให้คะแนนแบบที่สองเป็นการกำหนดคุณภาพในองค์รวมหรือภาพรวมของงานทั้งหมด ไม่ต้องแยกแยะลงไปเป็นขั้น ๆ ของการทำงาน ได้มีองค์กรทางการศึกษาทั้งในประเทศและต่างประเทศได้เสนอเกณฑ์การให้คะแนนแบบทดสอบอัตนัย โดยใช้รูบริค ดังนี้

1. กระทรวงศึกษาธิการ (2546 : 121-124) ได้เสนอเกณฑ์ในการให้คะแนนการทำข้อสอบอัตนัย ทักษะและกระบวนการให้เหตุผล ดังแสดงในตารางที่ 7 ดังนี้

ตารางที่ 7 เกณฑ์การให้คะแนนผลการทำข้อสอบแบบอัตนัย ทักษะและกระบวนการให้เหตุผลของกระทรวงศึกษาธิการ

เกณฑ์การให้คะแนน	ระดับคะแนน/ความหมาย
การแสดงวิธีทำชัดเจน สมบูรณ์ คำตอบถูกต้องครบถ้วน	4/ดีมาก
การแสดงวิธีทำยังไม่ค่อยชัดเจนนัก แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง คำตอบถูกต้องครบถ้วน	3/ดี
การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจน หรือไม่แสดงวิธีทำ คำตอบถูกต้องครบถ้วน หรือ การแสดงวิธีทำชัดเจน สมบูรณ์ แต่คำตอบที่ได้ไม่ถูกต้อง ขาดการตรวจสอบ	2/พอใช้
การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจน แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง คำตอบไม่ถูกต้องหรือไม่แสดงวิธีทำและคำตอบที่ได้ไม่ถูกต้อง แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง	1/ต้องปรับปรุง
ทำได้ไม่ถึงเกณฑ์	0/ไม่พยายาม

2. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2554 : 215) ได้กำหนดเกณฑ์การให้คะแนนแบบองค์รวมของการแก้สถานการณ์ปัญหา ดังแสดงในตารางที่ 8 ดังนี้

ตารางที่ 8 เกณฑ์การให้คะแนนแบบองค์รวมของการแก้สถานการณ์ปัญหา

เกณฑ์การให้คะแนน	ระดับคะแนน/ความหมาย
ตอบได้ถูกต้อง สามารถแสดงวิธีการหาคำตอบอย่างชัดเจน	4/ดีมาก
ตอบได้ถูกต้อง สามารถแสดงวิธีการหาคำตอบพอสื่อให้เข้าใจได้ครบถ้วน	3/ดี
ตอบได้ถูกต้อง สามารถแสดงวิธีการหาคำตอบพอสื่อให้เข้าใจได้เป็นบางส่วน	2/พอใช้
ตอบได้ถูกต้อง แต่ไม่สามารถแสดงวิธีการหาคำตอบได้ หรือ ตอบไม่ถูกต้องหรือไม่ตอบ แต่สามารถวิธีการหาคำตอบพอสื่อให้เข้าใจได้เป็นบางส่วน	1/ต้องปรับปรุง
ตอบไม่ถูกต้องหรือไม่ตอบ ไม่สามารถแสดงวิธีการหาคำตอบได้	0/ไม่พยายาม

3. กลุ่มนิเทศและติดตามผล สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาประถมศึกษาปัตตานี เขต 1 (2555 : ออนไลน์) ได้นำเสนอตัวอย่างเกณฑ์การประเมินกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เกี่ยวกับการแสดงวิธีทำโจทย์ปัญหา ดังแสดงในตารางที่ 9 ดังนี้

ตารางที่ 9 เกณฑ์การประเมินการแสดงวิธีทำโจทย์ปัญหา

เกณฑ์การให้คะแนน	ระดับคะแนน/
คำตอบถูกต้อง แสดงเหตุผลถูกต้อง แนวคิดชัดเจน	4
คำตอบถูกต้อง แสดงเหตุผลถูกต้อง อาจมีข้อผิดพลาดเล็กน้อยครบถ้วน	3
เหตุผลหรือการคำนวณผิดพลาด แต่มีแนวทางที่จะนำไปหาคำตอบ	2
แสดงวิธีคิดเล็กน้อย แต่ไม่ได้คำตอบ	1
ไม่ตอบ หรือตอบไม่ถูกเลย	0

4. ฝ่ายการศึกษาของรัฐแคลิฟอร์เนีย (California State Department of education. 1989 : ออนไลน์) ได้เสนอเกณฑ์การให้คะแนนกรณีแบบทดสอบอัตนัย ดังแสดงในตารางที่ 10 ดังนี้

ตารางที่ 10 เกณฑ์การให้คะแนนแบบทดสอบอัตนัยของฝ่ายการศึกษาของรัฐแคลิฟอร์เนีย

เกณฑ์การให้คะแนน	ระดับคะแนน
ตอบแบบชัดเจน โดยให้คำตอบสมบูรณ์ ชัดเจน มีเหตุผล ไม่คลุมเครือ และอธิบายได้ดีเยี่ยม ซึ่งรวมถึงการใช้แผนผังประกอบการอธิบาย ชัดเจน อ่านง่าย สามารถสื่อสารได้อย่างมีประสิทธิภาพ แสดงความเข้าใจเกี่ยวกับแนวคิดและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้เพื่อตอบคำถาม จำแนกส่วนประกอบสำคัญทั้งหมดของปัญหา ยกตัวอย่างที่ใช่และไม่ใช่ มีข้อมูลสนับสนุนชัดเจนและหนักแน่น	6
ตอบโดยมีข้อมูลเพียงพอ อธิบายชัดเจน มีเหตุมีผล และสมบูรณ์ ใช้แผนผังประกอบการอธิบายได้เหมาะสม สื่อสารได้อย่างมีประสิทธิภาพ แสดงความเข้าใจเกี่ยวกับแนวคิดและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้เพื่อตอบคำถาม จำแนกส่วนประกอบสำคัญโดยส่วนใหญ่ของปัญหา ยกตัวอย่างที่ใช่และไม่ใช่ มีข้อมูลสนับสนุนเพียงพอ	5
ตอบโดยมีข้อบกพร่องเล็กน้อย แต่มีข้อมูลน่าสนใจ ตอบคำถามถูกต้องครบถ้วน แต่อธิบายสับสน ข้ออ้างหรือข้อสนับสนุนไม่สมบูรณ์ แผนผังประกอบการอธิบายไม่เหมาะสม หรือไม่ชัดเจน แสดงความเข้าใจแนวคิดทางด้านคณิตศาสตร์ที่เป็นพื้นฐานในการตอบคำถาม ใช้แนวคิดทางด้านคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ	4
ตอบโดยมีข้อบกพร่องมากแต่ค่อนข้างพอใช้ เริ่มต้นในการตอบคำถามถูกต้อง แต่ไม่ตอบคำถามบางคำถาม แสดงออกถึงความไม่เข้าใจแนวคิดหรือกระบวนการทางคณิตศาสตร์ คำนวณผิด นำความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์ไปใช้ผิด แก้ปัญหาผิดวิธี	3
เริ่มต้นได้แต่แก้ปัญหาไม่ได้ อธิบายไม่เข้าใจ ใช้แผนผังประกอบการอธิบายไม่ชัดเจน แสดงถึงการไม่เข้าใจคำถาม คำนวณผิด	2

เกณฑ์การให้คะแนน	ระดับคะแนน
ไม่สามารถเริ่มต้นแก้ปัญหาได้ คำตอบไม่สอดคล้องกับคำถาม นำเสนอข้อมูลที่ไม่เกี่ยวกับคำถามหรือไม่ตอบ	1

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า ในการตั้งเกณฑ์การประเมินการทำแบบทดสอบแบบอัตนัย หรือแบบทดสอบที่แสดงการให้เหตุผล ใช้เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริคเป็นรายข้อ ดังนั้น ในการวิจัยครั้งนี้ จึงตั้งเกณฑ์การประเมินความสามารถในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต โดยให้คะแนนสถานการณ์ปัญหาแบบรูบิคเป็นรายข้อ ดังแสดงในตารางที่ 11 ดังนี้

ตารางที่ 11 เกณฑ์การให้คะแนนการทำแบบทดสอบสถานการณ์ปัญหาเชิงพีชคณิต

เกณฑ์การให้คะแนน	ระดับคะแนน/
สร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิตถูกต้อง หาคำตอบของกรณีเฉพาะถูกต้อง แสดงวิธีการหาคำตอบอย่างชัดเจนและแสดงเหตุผลถูกต้อง แนวคิดชัดเจน สมบูรณ์ ครบถ้วน	4
สร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิตถูกต้อง หาคำตอบของกรณีเฉพาะถูกต้อง มีข้อผิดพลาดเล็กน้อย การแสดงวิธีทำยังไม่ค่อยชัดเจนนัก แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง แสดงวิธีการหาคำตอบพอสื่อให้เข้าใจได้	3
เหตุผลหรือการคำนวณผิดพลาด แต่มีแนวทางที่จะนำไปหาคำตอบ การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจน หรือไม่แสดงวิธีทำแต่คำตอบถูกต้องครบถ้วน หรือ การแสดงวิธีทำชัดเจน สมบูรณ์ แต่คำตอบที่ได้ไม่ถูกต้อง แสดงวิธีการหาคำตอบพอสื่อให้เข้าใจได้เป็นบางส่วน	2
การแสดงวิธีสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิตยังไม่ชัดเจน และคำตอบที่ได้ไม่ถูกต้อง แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง	1
ไม่สามารถสร้างความเป็นกรณีทั่วไปได้	0

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยในประเทศ

ณัชชา กมล (2548 : 199 – 200) ได้พัฒนากรอบแนวคิดในการจำแนกลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ในส่วนของการคิดเชิงพีชคณิตที่เกี่ยวข้องกับแบบรูปโดยยึดรูปแบบการวิเคราะห์ลักษณะการตอบสนองของนักเรียนตามแนวคิดของบิกส์และคอลลิส (Biggs and Collis. 1982) ผลการวิจัยพบว่า ความคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนเกี่ยวกับแบบรูปสามารถจำแนกได้เป็น 4 ระดับ ได้แก่ ระดับ 1 นักเรียนไม่เข้าใจหรือเข้าใจสับสนเกี่ยวกับแบบรูปที่กำหนดให้เดาคำตอบหรือตอบแบบไม่ตรงประเด็น หรือใช้ข้อมูลเพียงประเด็นเดียวในแบบรูปเพื่อหาค่าของแต่ละเทอมในแบบรูป ระดับ 2 นักเรียนสามารถหาค่าของพจน์ถัดไปจากแบบรูปที่กำหนดให้ได้แต่ไม่สามารถหาค่าของเทอมที่อยู่ไกล ๆ ได้พยายามที่จะหากรณีทั่วไปของแบบรูปจากข้อมูลที่กำหนดให้ในแบบรูปเพียงประเด็นเดียวซึ่งทำให้ผลที่ได้ไม่ถูกต้อง ใช้ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของพจน์หาค่าของพจน์ถัดไปจากพจน์ที่อยู่ก่อนหน้าโดยใช้การวาดรูปหรือการนับ ระดับ 3 นักเรียนเข้าใจเฉพาะความสัมพันธ์ระหว่างค่าของพจน์ที่กำหนดให้และใช้ความสัมพันธ์ดังกล่าวในการหาค่าพจน์ที่อยู่ไกล ๆได้ด้วยวิธีการที่เป็นระบบ แต่ไม่เข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ ระดับ 4 นักเรียนเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์และสามารถอธิบายออกมาในรูปของคำพูดได้ สร้างกรณีทั่วไปของแบบรูปในรูปของสูตรทางพีชคณิตได้

วิษณุ นภาพันธ์ (2551 : 110 – 118) ได้ทำการศึกษาลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย โดยการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเรื่องแบบรูปและประโยคเปิดของจำนวน และการสัมภาษณ์เพิ่มเติม ผลการวิจัยพบว่า ลักษณะการให้เหตุผลเรื่องแบบรูปของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายสามารถจำแนกออกได้เป็น 4 กลุ่ม ได้แก่ กลุ่ม 0 กลุ่ม 1 กลุ่ม 2 และ กลุ่ม 3 นักเรียนส่วนใหญ่เป็นนักเรียนกลุ่ม 1 ซึ่งสามารถหาค่าของพจน์ถัดไป และพจน์ที่อยู่ใกล้ ๆ ได้ แต่ไม่สามารถหาค่าของพจน์ที่อยู่ไกล ๆ และพจน์ทั่วไปได้ และลักษณะการให้เหตุผลเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายสามารถจำแนกออกได้เป็น 4 กลุ่ม ได้แก่ กลุ่ม 0 กลุ่ม 1 กลุ่ม 2 และกลุ่ม 3 นักเรียนส่วนใหญ่เป็นนักเรียนกลุ่ม 2

ซึ่งมีความเข้าใจที่ถูกต้องเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับ และสามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดของจำนวนได้โดยใช้วิธีการคิดคำนวณ

พรรณทิพา พรหมรักษ์ (2552 :181 – 196) ได้พัฒนากระบวนการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลทางพีชคณิตและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้กระบวนการวางนัยทั่วไป ผลการวิจัยพบว่า กระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นประกอบด้วยขั้นตอน 4 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นการสร้างความสัมพันธ์ ขั้นการปฏิบัติกิจกรรม ขั้นการสร้างข้อสรุป และขั้นการประยุกต์ความรู้ ซึ่งทำให้ความสามารถในการให้เหตุผลทางพีชคณิตและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังเรียนจากกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นสูงกว่าก่อนเรียน ความสามารถในการให้เหตุผลทางพีชคณิตและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุม และความสามารถในการให้เหตุผลทางพีชคณิตและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองที่เรียนจากกระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น มีพัฒนาการไปในทางที่ดีขึ้น นักเรียนสามารถสร้างข้อสรุปด้วยตนเอง และสามารถอธิบายแนวความคิดโดยใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์ได้

โศจิวัจน์ เสริฐศรี (2553 : 135 – 139) ได้ทำการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนเพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ ผลการวิจัยพบว่า กระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นประกอบด้วยขั้นตอน 4 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นการค้นหาความสัมพันธ์ ขั้นการใช้วิธีคิดเชิงสัมพันธ์ ขั้นการสร้างข้อสรุป และขั้นการตรวจสอบและยืนยันข้อสรุป ซึ่งทำให้ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ หลังการเรียนสูงกว่าก่อนการเรียน ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตหลังการเรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ ของนักเรียนกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุม และความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนที่เรียนด้วยกระบวนการเรียนการสอนโดยใช้แนวคิดการคิดเชิงสัมพันธ์และแนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ มีพัฒนาการสูงขึ้น

จากการศึกษางานวิจัยในประเทศ พบว่า มีงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิตจำนวนไม่มาก โดยงานวิจัยที่พบเกี่ยวข้องกับศึกษาลักษณะการคิดและการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตซึ่งมีการพัฒนากรอบแนวคิดเพื่อนำไปเป็นเกณฑ์เปรียบเทียบกับ

ลักษณะการคิดและการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตที่นักเรียนแสดงออกมา ผลที่ได้คือ ได้กรอบแนวคิดที่สอดคล้องลักษณะการคิดและการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนไทย และงานวิจัยที่มุ่งพัฒนากระบวนการจัดการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปมาใช้ในการส่งเสริมความสามารถทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นการนำกระบวนการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปมาบูรณาการกับการจัดการเรียนรู้ตามแนวการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ แล้วนำกระบวนการที่พัฒนาขึ้นไปจัดการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมความสามารถทางคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียน ผลที่ได้คือ ได้ตัวอย่างของกระบวนการเรียนรู้ที่สามารถนำไปส่งเสริมความสามารถทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนได้ และไม่พบงานวิจัยที่กล่าวถึงความสามารถในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต

งานวิจัยต่างประเทศ

เพกก์ และเรดเด็น (Pegg and Redden. 1990 : 112) ได้ศึกษาและจำแนกรูปแบบการให้เหตุผลของนักเรียนที่มีอายุอยู่ระหว่าง 11-13 ปี จากความพยายามในการสร้างกฎทางพีชคณิตในการหาความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของพื้นสระว่ายน้ำรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และจำนวนแผ่นกระเบื้องที่ใช้ในการปูพื้นสระว่ายน้ำ ผลการวิจัยพบว่า การให้เหตุผลของนักเรียนสามารถจำแนกได้เป็น 5 กลุ่ม ได้แก่ กลุ่มที่ 1 นักเรียนจะใช้วิธีการวาดรูปหรือการนับหรือทั้งสองวิธี ช่วยในการหาคำตอบ กลุ่มที่ 2 นักเรียนจะเปลี่ยนจากการใช้วิธีการนับมาเป็นการใช้ตารางเพื่อช่วยหาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนกระเบื้องและความยาวด้านของพื้นสระน้ำ แต่ยังไม่สามารถแสดงความสัมพันธ์ในลักษณะของกรณีทั่วไปได้ กลุ่มที่ 3 สามารถหาความสัมพันธ์ในกรณีทั่วไปได้ แต่เป็นในลักษณะของการหาเทอมถัดไปจากเทอมที่ก่อนหน้า เช่น $T2 = T1 + 4$ เมื่อ T แทนจำนวนแผ่นกระเบื้อง กลุ่มที่ 4 ใช้วิธีการในลักษณะเดียวกันกับกลุ่มที่ 3 แต่แทนที่จะสนใจที่จำนวนแผ่นกระเบื้องกลับสนใจไปที่ความยาวด้านของพื้นสระน้ำ และใช้การวาดภาพและการนับน้อยกว่ากลุ่มที่ 3 และกลุ่มที่ 5 เป็นกลุ่มของนักเรียนที่สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างความยาวด้านของพื้นสระน้ำและจำนวนของแผ่นกระเบื้อง และสามารถเขียนแสดงความสัมพันธ์ออกมาในรูปของนิพจน์ทางพีชคณิตได้อย่างถูกต้อง เช่น $T = 4L + 4$ เป็นต้น

ออร์ทัน และออร์ทัน (Orton and Orton. 1999 : 104 – 120) ได้ศึกษาการหากรณีทั่วไปของแบบรูปของจำนวน โดยศึกษากับนักเรียนเกรด 6 – 8 โดยใช้แบบทดสอบแบบเขียนตอบและสัมภาษณ์เกี่ยวกับสิ่งที่นักเรียนเขียนตอบในขั้นแรก ผลการวิจัยพบว่าประมาณครึ่งหนึ่งของนักเรียนทั้งหมดสามารถหาพจน์ถัดไปของแต่ละแบบรูปได้ และมี

นักเรียนจำนวนมากเมื่อถูกกำหนดให้หาพจน์ที่ 20 หรือพจน์ที่ 100 จะมีข้อผิดพลาดในเรื่องของการคำนวณ มีนักเรียนส่วนน้อยเท่านั้นที่สามารถหาพจน์ที่ n ได้ นอกจากนี้ยังจำแนกลักษณะการตอบสนองของนักเรียนออกเป็น 5 ระดับ นักเรียนในระดับ 0 นักเรียนไม่มีการตอบสนองใด ๆ ระดับ 1 นักเรียนสามารถสังเกตพบสมบัติบางอย่างของแบบรูป ระดับ 2 นักเรียนสังเกตพบสมบัติของแบบรูปแต่ไม่สามารถใช้สมบัตินั้นในการหาพจน์ต่อไปของแบบรูปได้ ระดับ 3 นักเรียนสามารถหาพจน์ถัดไปของแบบรูปได้โดยใช้การพิจารณาจากผลต่างระหว่างพจน์ และระดับ 4 นักเรียนเข้าใจความสัมพันธ์ของแบบรูปในรูปของสูตรทางพีชคณิตแม้ว่าจะไม่สามารถแสดงออกมาได้อย่างเป็นทางการ

แบลนทัน และ กาพุท (Blanton and Kaput. 2005 : 412 – 446) ได้ศึกษาลักษณะการปฏิบัติการสอนในชั้นเรียนที่ส่งเสริมการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต โดยทำการศึกษาเป็นรายกรณีกับครูประจำการในระดับเกรด 3 ซึ่งครูได้เข้าร่วมโครงการพัฒนาการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตสำหรับนักเรียนร่วมกับผู้วิจัย ในการวิจัยครั้งนี้ครูร่วมกับผู้วิจัยได้มีการบูรณาการการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตประเภทต่าง ๆ ความถี่และรูปแบบของการบูรณาการ และเทคนิคการจัดการเรียนรู้ที่ส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลเข้าในรายวิชาปกติ ผลการวิจัยพบว่าครูสามารถบูรณาการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเข้าไปในการวางแผนการจัดการเรียนรู้ได้โดยวิธีการที่เกิดขึ้นเป็นไปเองตามธรรมชาติ และส่งผลทำให้นักเรียนเกิดการเปลี่ยนแปลงทักษะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตไปในทางบวก

ทาวน์เซนด์ (Townsend. 2005 : 141 – 162) ได้ศึกษาเพื่อตรวจสอบการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษา ในประเด็น ความยืดหยุ่นและกลวิธีในการให้เหตุเชิงพีชคณิต โดยศึกษากับนักเรียนระดับเกรด 10 จากโรงเรียนชนบทแถบมิดเวสต์ เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ สถานการณ์ปัญหาเชิงพีชคณิต และแบบสัมภาษณ์เกี่ยวกับการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาใช้กลวิธีในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเหมือนกัน ซึ่งกลวิธีมี 4 อย่าง ได้แก่ กลวิธีโดยปริยายของเหตุการณ์ กลวิธีการเปลี่ยนแปลงตามลำดับของเหตุการณ์ กลวิธีการเชื่อมโยงของเหตุการณ์ และกลวิธีการผสมผสานของเหตุการณ์ นักเรียนส่วนใหญ่ใช้กลวิธีการเปลี่ยนแปลงตามลำดับของเหตุการณ์ รองลงมาคือกลวิธีการผสมผสานของเหตุการณ์ในการแก้สถานการณ์ปัญหาให้ประสบผลสำเร็จ ในขณะที่กลวิธีกลวิธีโดยปริยายของเหตุการณ์ เป็นกลวิธีที่นักเรียนใช้น้อยที่สุด และนักเรียนที่มีความยืดหยุ่นระดับสูงจะสามารถตรวจสอบการใช้กลวิธีและกฎที่

พัฒนาขึ้นได้อย่างเหมาะสม ส่วนนักเรียนที่มีความยืดหยุ่นเชิงพีชคณิตระดับต่ำไม่สามารถตรวจสอบการใช้กลวิธีหรือปรับใช้กฎเกณฑ์ต่าง ๆ ได้

จาคอบส์ และคณะ (Jacobs et al.. 2005: 258-288) ได้ศึกษาการพัฒนาการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตสำหรับนักเรียนในโรงเรียนประถมศึกษาในโรงเรียนชนบท โดยศึกษากับครูและนักเรียนระดับประถมศึกษา ผลการวิจัยพบว่า ครูที่เข้าร่วมโครงการสามารถใช้กลวิธีการคิดเชิงสัมพันธ์ที่หลากหลาย มากกว่าครูที่ไม่เข้าร่วมโครงการ และนักเรียนในชั้นเรียนที่มีครูเข้าร่วมโครงการ มีความเข้าใจเกี่ยวกับสัญลักษณ์เท่ากับและใช้กลวิธีการสะท้อนความคิดเชิงสัมพันธ์มากกว่านักเรียนในชั้นเรียนที่ครูไม่เข้าร่วมโครงการ

แลนนิน บาร์เกอร์ และทาวเซนด์ (Lannin, Barker and Townsend. 2006 : 3-28) ได้ศึกษากลวิธีการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต ในประเด็นปัจจัยที่ส่งผลต่อการเลือกกลวิธีของนักเรียน โดยศึกษากับนักเรียนระดับเกรด 5 ผลการวิจัยพบว่า ปัจจัยที่ส่งผลต่อกลวิธีของนักเรียน ได้แก่ ค่าที่เป็นเงื่อนไขของปัญหา โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ของสถานการณ์ปัญหา กลวิธีที่เคยใช้ มโนภาพเกี่ยวกับสถานการณ์ และปฏิสัมพันธ์ทางสังคมกับครูและนักเรียนคนอื่น โดยนักเรียนใช้ปัจจัยเหล่านี้เพื่อเพิ่มความสามารถในการพยากรณ์เกี่ยวกับกลวิธีที่ใช้ อย่างไรก็ตามด้วยธรรมชาติที่ซับซ้อนของปัจจัยที่ส่งผลต่อกลวิธีเหล่านี้ก็เป็นสิ่งที่การกระตุ้นให้นักเรียนได้พัฒนาจนเป็นผู้เชี่ยวชาญในการเลือกกลวิธีเพื่อแก้ปัญหาในโลกจริงได้

แลนนิน (Lannin, 2007 : 231-258) ได้ศึกษาการสร้างข้อสรุป (การสร้างความเป็นกรณีทั่วไป) และการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตผ่านกิจกรรมการสร้างแบบรูป โดยศึกษากับนักเรียนระดับเกรด 6 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีทั้งการแสดงเชิงประจักษ์และไม่มีการแสดงออกมา ในระหว่างการอภิปรายร่วมทั้งชั้นผู้วิจัยพบว่านักเรียนสามารถสร้างข้อสรุปและให้เหตุผลอย่างเหมาะสม นักเรียนที่ใช้แผนผังเรขาคณิตประสบความสำเร็จในการสร้างข้อสรุปและการให้เหตุผลอย่างสมเหตุสมผล อย่างไรก็ตามพบว่า ในระหว่างการอภิปรายเป็นกลุ่มย่อย นักเรียนแทบจะไม่มีการให้เหตุผลและการสร้างข้อสรุป นักเรียนมุ่งเน้นความสนใจไปยังค่าของตัวอย่างเฉพาะมากกว่าการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวอย่างนั้น ๆ

เอลลิส (Ellis. 2007 : 194 -229) ได้ศึกษาความเชื่อมโยงระหว่างการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปและการให้เหตุผลเกี่ยวกับความสัมพันธ์เชิงเส้น โดยศึกษากับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เพื่อพิจารณาถึงวิธีการของนักเรียนในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปและการให้เหตุผล ซึ่งข้อมูลเกี่ยวกับวิธีการที่นักเรียนแสดงออกมาจะถูกนำมาจัดประเภทเพื่อ

สร้างความเชื่อมโยงระหว่างประเภทของการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปและการให้เหตุผล ผลการวิจัยพบว่า ปัจจัยที่ส่งเสริมให้เหตุผลเชิงพีชคณิตจองนักเรียนเพิ่มขึ้น ได้แก่ วงจรการปฏิบัติ/การสะท้อนผล ความสนใจทางคณิตศาสตร์ การสร้างความเป็นกรณีทั่วไป และอิทธิพลของการให้เหตุผลทางนิรนัยบนการสร้างความเป็นกรณีทั่วไป

ริทเทิล-จอห์นสัน และ สตาร์ (Rittle-Johnson B. and Star J.R. 2007 : 1-15) ได้ศึกษาความยืดหยุ่นในการแก้ปัญหา: กรณีการแก้สมการ โดยศึกษากับนักเรียนเกรด 6 ซึ่งแก้ปัญหาสมการเชิงเส้นเป็นเวลาสามชั่วโมง ผลการวิจัยพบว่า กลยุทธวิธีการแก้ปัญหาที่แตกต่างและหลากหลาย เป็นปัจจัยที่ส่งผลต่อการปรับปรุงความยืดหยุ่นในการแก้ปัญหาของนักเรียน โดยการใช้กลวิธีการแก้ปัญหาแบบต่าง ๆ ในการจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียนนำไปสู่การปรับปรุงความยืดหยุ่นในการแก้ปัญหาของนักเรียนโดยตรง

ริทเทิล-จอห์นสัน และ สตาร์ (Rittle-Johnson B. and Star J.R. 2008 : 20-27) ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลของการเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างความรู้เชิงมโนทัศน์และความยืดหยุ่นเชิงกระบวนการสำหรับการแก้สมการ โดยศึกษากับนักเรียน เป็นนักเรียนเกรด 7 และ 8 ที่เรียนการแก้สมการ ผลการวิจัยพบว่า ความรู้เชิงมโนทัศน์และความยืดหยุ่นเชิงกระบวนการของนักเรียนเป็นสิ่งที่ส่งเสริมให้การเปรียบเทียบวิธีการแก้ปัญหาและการเปรียบเทียบประเภทปัญหาประสบความสำเร็จที่ดีที่สุด นอกจากนี้การเปรียบเทียบทำให้ได้ได้พิจารณาเกี่ยวข้องกับคุณสมบัติและวิธีการเปรียบเทียบของตัวอย่างที่แตกต่างกัน ซึ่งมีประโยชน์อย่างยิ่งในการเรียนรู้คณิตศาสตร์

จากการศึกษางานวิจัยต่างประเทศ พบว่า มีงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตซึ่งมีลักษณะเป็นการศึกษา จำแนก และตรวจสอบการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต ศึกษาลักษณะการสอนที่ส่งเสริมการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต และศึกษาการพัฒนาการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต ผลที่ได้คือ ได้แนวทางในการพัฒนาการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนที่สอดคล้องกับความสามารถและความแตกต่างระกว่างบุคคล งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิตซึ่งมีลักษณะเป็นการศึกษาการหากรณีทั่วไป กลวิธีการสร้างความเป็นกรณีทั่วไป ศึกษาความยืดหยุ่นในการแก้ปัญหา ผลที่ได้คือ ได้ข้อมูลเกี่ยวกับรูปแบบของการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปของนักเรียน และปัจจัยที่ส่งเสริมให้นักเรียนสามารถสร้างความเป็นกรณีทั่วไปได้ อย่างไรก็ตามไม่พบงานวิจัยที่กล่าวถึงการศึกษาความสามารถในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต ที่มุ่งเน้นการประเมินความสามารถในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิต

จากการศึกษาทั้งงานวิจัยในประเทศและต่างประเทศ ไม่พบงานวิจัยที่ศึกษาความสามารถในการสร้างความเป็นกรณีทั่วเชิงพีชคณิต จากเหตุผลดังกล่าวผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาความสามารถในการสร้างความเป็นกรณีทั่วไปเชิงพีชคณิตของนักเรียน